(34)

Fonctions Zétafuchsiennes

Non copié

Terminé le 30 Mai 1884

34

Mémoire sur les Fonctions Zetafuchsiennes

par H Poincaré à Paris.

§1. Introduction

Considérons une équation linéaire quelconque d'ordre p.

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum_{k=0}^{k=p-1} \varphi_k(x,y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0 \qquad\qquad (2) \quad f(x,y)=0$$

où les φ sont des fonctions rationnelles et où la relation (2) est algébrique. Soit maintenant une équation auxiliaire:

$$(3) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \theta(x,y)\,w$$

où $\theta(x,y)$ est une fonction rationnelle telle que tous les points singuliers de ~~(1)~~ l'équation (1) appartiennent à l'équation (3). Soit a un point singulier appartenant à la fois aux deux équations; ce point singulier regardé comme appartenant à (1) nous conduira à une équation déterminante E_1 de degré p; regardé comme appartenant à (3), il nous conduira à une équation déterminante E_1' du second degré. Soit δ la différence des deux racines de E_1'. Je suppose que θ ait été choisi de telle sorte que δ soit nul ou bien que ~~toutes les racines de l'équation E_1' soient~~ δ étant une partie aliquote de l'unité toutes les racines de l'équation E_1' soient des multiples de δ. Dans le cas où dans le voisinage du point a les intégrales de l'équation (1) seraient irrégulières, δ devrait être supposé nul ~~Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ; donnons nous arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à l'équation (1)~~ Il faut enfin que même pour les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à l'équation (1), δ soit nul ~~ou~~ soit une partie aliquote de l'unité et que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières.

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ. Supposons même que l'on ~~se donne~~ choisisse arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à (1) et les équations déterminantes relatives ~~aux~~ à tous les points singuliers de (3) en satisfaisant toutefois aux diverses conditions que nous venons d'énoncer. Quand ce choix sera fait, θ ne sera pas encore entièrement déterminé, et il y restera un certain nombre de paramètres ~~restés~~

arbitraires. Dans divers mémoires ~~antérieurement~~ insérés aux Acta Mathematica, j'ai démontré qu'on pouvait disposer de ces paramètres:

1° d'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle.

2° d'une infinité de manières, de telle façon que x et y soient fonctions kleinéennes de z n'existant pas dans tout le plan.

3° d'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes et kleinéennes de z existant dans tout le plan.

Dans tous ces cas, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions uniformes de z.

Nous supposerons pour fixer les idées que l'équation (3) ait été choisie de telle sorte que ~~x~~ x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont le centre est 0 et le rayon 1 (1ère, 2e et 6e familles). Alors les intégrales de l'équation (1) pourront se mettre sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de z et convergentes tant que z reste intérieur au cercle fondamental; elles sont donc toujours convergentes puisque la variable z ne peut jamais sortir de ce cercle.

Envisageons un cas particulier remarquable, celui où ~~x~~ S est nul pour tous les ~~valeu~~ points singuliers de l'équation (3) et où par conséquent x et y sont des fonctions fuchsiennes de la 1e famille. Dans ce cas, les intégrales de l'équation (1), de même que x et y, sont des fonctions holomorphes de z à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et toujours convergentes puisque le cercle de convergence est le cercle fondamental et que la variable ne sort jamais de ce cercle. Quant aux coëfficients de ces séries on les calcule aisément

par récurrence et par la méthode des coëfficients indéterminés, dès que l'on connaît les coëfficients des équations (1), (2) et (3)
Ainsi on peut trouver des développements des intégrales qui sont toujours valables et à ce point de vue, il est, dès à présent, permis de dire que nous savons intégrer toutes les équations linéaires à coëfficients algébriques.

Mais les développements ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants pour l'esprit, parce que les différents termes ne se déduisent pas les uns des autres par une loi simple. Il faut donc chercher à exprimer les intégrales par des ~~développements suivant~~ séries dont tous les termes soient donnés par une formule générale simple, comme l'étaient par exemple les termes des séries thétafuchsiennes. Tel est l'objet du présent mémoire. Les séries que je vais chercher à obtenir seront moins propres peut-être au calcul numérique que les développements suivant les puissances de z, mais elles ~~ne~~ seront plus instructives et nous permettront de pénétrer plus profondément dans l'étude intime des fonctions qu'elles représentent.

Toutefois dans ce qui va suivre, je serai obligé de supposer que l'équation (1) a toutes ses intégrales régulières pour employer l'expression de MM Fuchs, Thomae et Fröbenius. Dans le cas où il y aurait des intégrales irrégulières, rien de ce que je vais dire ne serait plus applicable et je ne sais, au sujet de ces équations irrégulières rien de plus que ce que j'~~avais énoncé~~ ai démontré dans les quatre mémoires antérieurs. J'avais, il est vrai, dans les Mathematische Annalen, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières. Mais ce résultat est inexact, j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M Klein dont je ne connaissais pas la démonstration.

§ 2 Classification des Equations Linéaires.

Soient

$$(1)\quad \frac{d^p v}{dx^p} + \Sigma\, \varphi_k(x,y)\,\frac{d^k v}{dx^k} = 0 \qquad (2)\quad \psi(x,y)=0$$

$$(1\text{ bis})\quad \frac{d^p u}{dx^p} + \Sigma\, \varphi'_k(x,y)\,\frac{d^k u}{dx^k} = 0$$

deux équations linéaires d'ordre p à coëfficients rationnels en x et y. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme:

$$u = \Lambda \left[F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + F_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \cdots + F_{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}} \right]$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (1), les F étant des fonctions rationnelles de x et d'y, et Λ une fonction quelconque de x et d'y. Elles appartiendront à la même *espèce* si la fonction Λ est égale à 1.

Si les deux équations (1) et (1 bis) sont de la même espèce, elles auront *même groupe*, c'est à dire que lorsque le point (x, y) décrira un contour quelconque sur la surface de Riemann (2), les intégrales de l'équation ~~(1)~~ (1 bis) subiront précisément la même substitution linéaire que les intégrales de l'équation (1). Si les deux équations sont seulement de la même famille, elles n'ont plus même groupe, mais quand le point (x, y) décrit un contour quelconque, on obtient les valeurs finales des intégrales de (1 bis) en appliquant aux valeurs initiales la substitution qu'ont subie les intégrales de (1) et en multipliant ensuite tous les résultats ainsi obtenus *par un même facteur*. Ainsi les *rapports* des intégrales de (1 bis) ont subi précisément la même transformation que les rapports des intégrales de (1).

Soit:

$$u' = \frac{u}{\Lambda} = F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + \cdots + F_{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}}$$

u' satisfera à une équation à coëfficients rationnels en x et y:

$$(1\ \text{ter}) \quad \frac{d^p u'}{dx^p} + \Sigma \varphi''_K \frac{d^K u'}{dx^K} = 0.$$

On aura alors ~~une seconde~~, en faisant $u = \Lambda u'$ dans (1 bis): et divisant par Λ

$$(1\ \text{quater}) \quad \frac{d^p u'}{dx^p} + p \frac{\Lambda'}{\Lambda} \frac{d^{p-1} u'}{dx^{p-1}} + \varphi'_{K-1} \frac{d^{p-1} u'}{dx^{p-1}} + \cdots = 0$$

Les deux équations (1 ter) et (1 quater) étant irréductibles, doivent être identiques d'où:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\varphi''_{K-1} - \varphi'_{K-1}}{p}.$$

Il suit de là que la dérivée logarithmique de Λ est rationnelle en x et y. Donc Λ est une de ces fonctions étudiées par M. Appell et ~~dont~~ analogues aux fonctions doublement périodique de 2de espèce. De plus, quand sur la surface de Riemann (2), le point analytique (x, y) décrit un cycle ou bien un contour fermé autour d'un point singulier, la fonction Λ est simplement multipliée par un facteur constant.

Etudions maintenant ~~les~~ ce qui se passe dans le voisinage d'un point quelconque, et pour cela rappelons les différents cas qui peuvent se présenter, d'après les travaux de M. Fuchs:

1° Il peut arriver que le ~~point singulier~~ $x = a$ que l'on étudie soit irrégulier, c'est à dire que parmi les intégrales il y en ait au moins une qui soit irrégulière et par conséquent développable en série de la forme suivante:

$$(x-a)^{\alpha} \sum A_n (x-a)^n$$

où dans la série l'exposant n peut prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

Il est aisé de voir que si le point $x = a$ est un point irrégulier pour l'équation (1) il sera aussi un point irrégulier pour toutes les équations de la même espèce. Quant aux équations de la même famille, elles auront toutes aussi un point irrégulier au point a ~~à moins que les intégrales de l'équation (1) ne~~ (sauf le cas particulier où on pourrait rendre les intégrales de l'équation (1) régulières en les multipliant par une même fonction μ.)

Nous supposerons d'ailleurs dans tout ce qui va suivre qu'aucune des équations que nous considérerons ne présentent de point irrégulier. Ainsi tous les points singuliers (1) et de (1 bis) seront supposés réguliers

2° Il ~~peut~~ arrive ensuite que le point singulier $x = a$ soit logarithmique, c'est à dire que parmi les intégrales de l'équation (1) il y en ait au moins une de la forme:

$$(x-a)^{\alpha} \left[\varphi + \psi \log (x-a) \right]$$

φ et ψ étant holomorphes. Si le point $x = a$ est un point logar. pour l'équation (1) il sera aussi un point logarithme pour toutes les équations de la même famille.

3° Il peut arriver enfin que le point $x=a$ soit un point singulier ordinaire ou un point non singulier. Dans ce cas ~~Le~~ il y a p intégrales de la forme suivante:

$$(x-a)^{\lambda_1}\varphi_1,\ (x-a)^{\lambda_2}\varphi_2,\ \text{———}\ (x-a)^{\lambda_p}\varphi_p$$

les φ étant holomorphes. Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, — \lambda_p$ sont les racines d'une équation facile à former et qu'on appelle équation déterminante. En général, lorsque cette équation a une racine double ou deux racines ne différant que d'un nombre entier, on a affaire à un point singulier logarithmique; il peut arriver cependant, si certaines conditions sont remplies, que le point singulier soit ordinaire, quoique ~~deux rac~~ la différence de deux racines de l'équation déterminante soit un entier.

Il peut se faire alors:

1° ou bien que ~~les différences de~~ l'équation aux différences des racines de l'équation déterminante n'aient pas toutes ses racines entières auquel cas le point $x=a$ est un point singulier proprement dit.

2° ou bien que les p racines de l'équation déterminante soient de la forme:

$$K+h_1,\ K+h_2,\ \text{———},\ K+h_p$$

K étant une quantité non entière et $h_1, h_2, — h_p$ étant des entiers. Alors $x=a$ (s'il n'est pas logar. ce que je suppose) est un point à apparence singulière (Cf. Mémoire sur les Groupes des Equations Linéaires page 217)

3° ou bien que les p racines soient entières. Alors pour $x=a$ toutes les intégrales sont holomorphes ou méromorphes; ce point est un point singulier polaire. (s'il n'est pas logar. ce que je suppose toujours)

4° enfin si les p racines en question sont précisément

$$0,\ 1,\ 2\ \text{———}\ (p-1)$$

on a affaire à un point ~~ordinaire~~ non-singulier

Que se passera-t-il dans le voisinage d'un point ~~singul~~ non logarithmique si l'on passe de l'équation (1) à une équation de la même famille ou de la même espèce.

~~Soit~~ Soit $x = a$ un point logarithmique, considérons trois équations linéaires (1), (1 bis) et (1 ter), la seconde de la même espèce que (1), la troisième de la même famille que (1). Soient (3), (3 bis) et (3 ter) les équations déterminantes relatives à ces trois équations différentielles et au point $x = a$. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2 \text{ ——— } \alpha_p$$

les racines de (3). Celles de (3 bis) seront:

$$\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2, \text{ ——— }, \alpha_p + h_p.$$

et celles de (3 ter) seront:

$$\beta + \alpha_1 + h_1, \beta + \alpha_2 + h_2, \text{ ——— }, \beta + \alpha_p + h_p$$

β étant quelconque et les h étant des entiers positifs ou négatifs.

D'où les conséquences suivantes; Si le point $x = a$ est un point singulier proprement dit pour l'équation (1), il en sera un aussi pour les équations (1 bis) et (1 ter). Si ce point est un point non-singulier pour l'équation (1), il sera ~~non singulier~~ non singulier ou polaire pour (1 bis) et il sera non-singulier, polaire ou à apparence singulière pour (1 ter)

Donc deux équations de la même famille ont les mêmes points singuliers proprement dits (logarithmiques ou non logarithmiques) (et en particulier les points polaires.) Mais les points à apparence singulière peuvent être différents.

Supposons maintenant que les deux équations (1) et (1 bis) soient dépourvues de second terme, c'est à dire que:

$$\varphi_{p-1} = \varphi'_{p-1} = 0.$$

Dans ce cas la somme des racines de l'équation déterminante est égale à

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

~~Si non~~ Supposons que ces racines soient toutes entières sans être précisément égales à

$$0, 1, 2 \text{ ——— } (p-1)$$

c'est à dire ~~que~~ nous ayons affaire à un point singulier polaire; La somme des racines doit être égale à la somme des $p-1$ premiers nombres. D'ailleurs deux racines ne peuvent être égales; car il est aisé de constater que l'équation déterminante relative à un ~~point~~ singulier non logarithmique ne peut avoir deux racines égales. Donc une au moins des racines devra être négative; ~~c'est ce qui justifie~~ donc le point $x=a$ est un pôle pour une des intégrales de l'équation (1). ~~Don~~ C'est ce qui justifie le nom de point polaire donné à cette sorte de point singulier.

Envisageons d'abord des équations du 2d ordre. La somme des racines de l'équation déterminante est égale à 1, et leur différence est égale à 1 pour les points non singuliers, à un nombre entier plus grand que 1 pour les points à apparence singulière, à un nombre non entier pour les points singuliers non logarithmiques; à 0 à 1 ou à un entier pour les points logarithmiques.

Nous ferons les conventions suivantes:

Si pour un point ~~singulier~~ à apparence singulière, cette même différence est égale à $n+1$, nous dirons que nous avons affaire à un point à apparence singulière du n^e ordre ou encore à n points à apparence singulière confondus. Si pour un point singulier

que

logar. ou non

cette même différence dont nous pouvons toujours supposer la partie réelle positive est égale à $n+\lambda$, λ étant un nombre dont la partie réelle λ_1 satisfait aux inégalités

$$0 \leq \lambda_1 < 1$$

nous dirons que nous avons affaire à un point singulier et à n points à apparence singulière confondus.

Grâce à ces conventions l'énoncé du théorème qui va suivre est un peu simplifié. Je dis que si l'équation (1) a un nombre pair de points ~~à~~ apparence singulière, il en sera de même de l'équation (1 bis) et inversement. En effet, soit:

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi v = 0$$

l'équation (1), posons:

$$u = \Lambda\left(F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx}\right)$$

~~d'où:~~

$$\cancel{\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 \Lambda}{dx^2}(F_0 v + F_1}$$

Soit Λ_0, Λ_1 et M des fonctions ~~On peut toujours supposer que~~ ~~Λ_0 ait été choisi~~ de telles ~~sorte~~ que:

$$\Lambda_0 F_0 = \frac{dM}{dx} \qquad \Lambda_0 F_1 = M \qquad \Lambda = \Lambda_0 \Lambda_1$$

d'où

$$\cancel{u = \Lambda_1 u = \frac{d}{dx}(} \qquad u = \Lambda_1 \frac{d}{dx}(Mv)$$

Il résulte de là que le passage d'une équation du 2^d ordre à une autre de même famille peut toujours être obtenu par la série d'opérations suivantes:

1° Multiplier la fonction ~~v par~~ inconnue par un facteur convenable.

2° La différentier.

3° La multiplier de nouveau par un facteur convenable.

La première et la dernière de ces trois opérations ne modifie pas la différence des racines de l'équation déterminante. La seconde opération seule peut altérer cette différence. Voici comment; je suppose d'abord que l'on ait pour la fonction inconnue v le développement suivant:

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots) + \mu(B'x + C'x^2 + D'x^3 \dots)$$

λ et μ étant des constantes d'intégration; ce développement montre de plus que les racines de l'équation déterminante sont 0 et 1. Si l'on a:

$$\cancel{\frac{B'}{B^x} = \frac{C'}{C^x} = h} \qquad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = h$$

il viendra pour ~~le~~ le développement de $\frac{dv}{dx}$:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(3Dx^2 + \dots) + (\mu + \lambda h)(B' + 2C'x + 3D'x^2 + \dots)$$

ce qui montre que les racines de l'équation déterminantes sont devenues 0 et 2. Ainsi la différentiation peut faire apparaître de nouveaux points à apparence singulière, mais elle en peut aussi faire disparaître. Soit en effet:

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + \dots) + \mu(C'x^2 + D'x^3 + \dots$$

le développement de v. On voit que l'équation déterminante a pour racines 0 et 2. ~~Soit ma~~ Si l'on différentie, il vient:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(B + 2Cx + \dots) + \mu(2C'x + 3D'x^2 + \dots)$$

où l'on voit que les racines sont devenues 0 et 1. ## ##

~~## En général, toutes les fois~~ En général, toutes les fois que l'une des racines de l'équation déterminante sera nulle, sans que l'autre soit égale à 1 la différentiation fera augmenter ou diminuer d'une unité la différence de ces racines et elle ne pourra la faire varier si l'une des racines n'est pas nulle.

Soit:

$$(4) \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_1 \frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0$$

l'équation à laquelle satisfait v; ~~sa différentielle~~ dérivée

$$w = \frac{dv}{dx}$$

satisfera à:

$$(5)\quad \frac{d^2w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1\varphi_0'}{\varphi_0} + \varphi_1'\right) w = 0$$

Il s'est introduit par la differentiation de nouveaux points à apparence singulière définis par l'équation:

$$\varphi_0 = 0.$$

Supposons ce qui est toujours possible que l'infini soit un point singulier ~~rati~~ ordinaire d'où il résulte que φ_0 doit être une fonction rationnelle de degré -2. ~~Soit p le nombre des points singuliers ordinaires ou logarithmiques de l'équation (4), le point ∞ excepté~~ ~~Soit q le nombre des points à apparence singulière~~. La fonction φ_0 aura ~~p + q~~ $2d+s$ infinis, parmi lesquels d infinis doubles et s infinis simples; ~~de sorte que:~~

$$\cancel{p + q = 2d + s.}$$

Elle aura k zéros de sorte que:

$$k = 2d + s - 2$$

ou

$$k \equiv s \quad \text{mod } 2.$$

A chaque infini simple de φ_0 correspond une équation déterminante dont une des racines est nulle; par conséquent ~~par la différentiation~~ la différence de ces racines diminuera ou augmentera d'une unité. D'après les conventions faites plus haut, il disparaîtra ou il s'introduira un point à apparence singulière. Ainsi par le fait de ~~la differentiation~~ ~~chacun des~~ des s infinis simples de φ_0 il s'introduira 6 pareils points ~~±1 pareils points~~, par le fait ~~de ces k infinis il s'introduira donc 6~~ où

$$6 \equiv s \quad \text{mod } 2.$$

Par le fait des k zéros de φ_0, il s'introduira k points à apparence singulière, de sorte qu'il s'en est introduit en tout

$$k + 6 \equiv 0 \quad \text{mod } 2.$$

Donc la parité du nombre des points à apparence singulière n'a pas varié.

§3 Réduction des Equations Linéaires.

Parmi les équations d'une même famille, il en est une que l'on peut regarder comme plus simple que toutes les autres. On peut se proposer, étant donnée une équation linéaire, de trouver la transformation qui la réduira à l'équation la plus simple de sa famille.

Afin d'éviter des complications inutiles, et qui ne touchent pas au fond des choses, je traiterai un cas particulier.

Je supposerai que l'équation à réduire est du 2^d ordre et que ses coëfficients sont rationnels en x, et j'écrirai cette équation sous la forme:

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} \mp \varphi_0 v = 0.$$

~~Je supposerai que les seuls points à apparence singulière~~

Soient $a_1, a_2 \dots a_k$ les points singuliers; $b_1, b_2, \dots b_h$ les points à apparence singulière; je supposerai que les racines des équations déterminantes relatives à ceux-ci soient $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Réunissons dans une même classe toutes les équations de la forme (1) où les points singuliers $a_1, a_2, \dots a_k, \infty$ sont les mêmes avec les mêmes équations déterminantes, et où la parité du nombre h des points apparents est la même. Chaque classe contiendra une infinité de familles. Il y aura un certain nombre de fonctions des ~~équats~~ coëfficients des équations d'une même classe qui ~~ne varieront~~ auront la même valeur pour ~~les~~ celles de ces équations qui appartiennent à une même famille. Ce sont des invariants qui définissent la famille et différents de ceux qui définissent la classe. Combien y a-t-il de pareils invariants? En d'autres termes, combien faut-il de conditions pour que deux équations qui sont déjà supposées appartenir à une même classe, appartiennent aussi à une même famille?

Soit θ une fonction rationnelle quelconque de x. Posons:

$$-\varphi_0 + \psi = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$$

La fonction

$$u = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

satisfera à l'équation:

$$(2) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} \mp u\left[-\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi} + \frac{3}{4}\frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi'\theta}{\psi} + 2\theta' - \varphi_0\right] = 0$$

1

Le coëfficient de u' que nous appellerons Φ pour abréger admet comme infinis doubles:

1° Les infinis de φ_0 qui sont en général des infinis de φ.

~~2° Les infinis de θ qui sont en général des infinis de φ.~~

2° Les zéros de φ.

~~Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que le degré du numérateur de θ est d'une unité inférieur au degré du dénominateur.~~ et que tous les infinis de θ sont simples Soit λ le nombre des infinis simples de θ. Cette fonction contiendra 2λ paramètres arbitraires.

La fonction φ admet alors $\lambda + h + k$ infinis doubles, et par conséquent, puisqu'elle est de degré -2:

$$2\lambda + 2h + 2k - 2$$

~~inf~~ zéros.

Il résulte de là que la fonction Φ possède:

$$3\lambda + 3h + 3k - 2$$

infinis doubles; comme elle est de degré -2, elle dépendra de

$$\cancel{6\lambda + 6h + 6k - 5}$$

$$9\lambda + 9h + 9k - 6$$

paramètres. Mais de ces $3\lambda + 3h + 3k - 2$, $3\lambda + 3h + 2k - 2$ sont des points à apparence singulière, d'où résultent

$$6\lambda + 6h + 4k - 4$$

conditions imposées à la fonction Φ. Il reste donc:

$$\cancel{3\lambda + 3h +}$$

Le rapport des intégrales de (1) subit certaines substitutions linéaires formant un groupe G, lorsque la variable x décrit certains contours dans son plan. Si les équations (1) et (2) appartiennent à la même famille, le rapport des intégrales de (2) subira les mêmes substitutions linéaires formant le même groupe G, et réciproquement si ces deux rapports subissent les mêmes substitutions, les deux équations appartiennent à la même famille.

Il résulte de là que le nombre cherché des invariants est au plus égal au nombre des paramètres arbitraires du groupe G. Or ce groupe est dérivé de K substitutions ce qui fait $3K$ paramètres, puisque chaque substitution dépend de 3 paramètres. Mais les équations

(1) et (2) étant assujetties à appartenir à une classe déterminée, on connaît les multiplicateurs de ces K substitutions correspondant à des contours infiniment petits décrits autour de chaque point singulier et celui de la substitution qui correspond à un contour infiniment grand. Il reste $2K-1$ paramètres. Mais, si l'on remarque que deux groupes G et $6^{-1}G6$ où 6 est une substitution linéaire quelconque ne doivent pas être regardés comme distincts, on verra qu'il n'y a en réalité que $2K-4$ paramètres arbitraires.

Ainsi le nombre des invariants ne peut dépasser $2K-4$. ~~Com~~ Il sera précisément égal à ce nombre, si l'on peut trouver dans chaque classe une équation admettant un groupe donné. Comme nous démontrerons plus loin ce théorème, nous admettrons que le nombre des invariants est $2K-4$ en nous dispensant de faire le calcul direct qui ne présente d'ailleurs pas de difficulté.

~~Si l'on~~ L'équation réduite, c'est à dire la plus simple des équations d'une famille donnée, dépendra donc encore de $2K-4$ paramètres. Quel est donc le minimum des points à apparence singulière que l'on peut lui attribuer? Supposons que l'équation (2) soit réduite. ~~I~~ Elle admettra ~~contiendra~~ K points singuliers et h' points apparents; ~~on doit avoir:~~ la fonction Φ qui est de degré 2 a donc ~~contient~~ $K+h'$ infinis doubles et dépend par conséquent de $3K+3h'-1$ coëfficients. Mais il y a entre eux $2K+2h'+1$ ~~de ces coëfficients sont~~ relations qui expriment que l'équation appartient à la classe considérée et que les h' points en question sont bien des points à apparence singulière. Il reste donc $K+h'-2$ paramètres. Or ce nombre doit être au moins égal à $2K-4$. On doit donc avoir:

$$h' \geq K-2$$

Mais on a de plus $h \equiv h' \mod 2$; le nombre minimum des points ~~doubles~~ apparents est donc $K-2$ si K et h sont de même parité et $K-1$ si K et h sont de parité différente. ~~Mais~~ Dans le premier cas ~~les points apparents~~ il n'y a dans la famille qu'un nombre fini d'équations n'ayant que $K-2$ points apparents et on peut prendre l'une d'elles comme équation réduite. Dans le second cas au contraire il y a une infinité d'équations de la même famille n'ayant que $K-1$ points apparents. On peut encore prendre l'une d'elles pour équation réduite, mais cela ne suffit pas pour la déterminer. Nous achèverons de la définir en lui imposant cette condition que l'un des points apparents devra avoir une valeur déterminée par exemple 0.

Voici maintenant comment on peut arriver à réduire ~~une~~ équation linéaire (1). Nous supposerons d'abord que K et h sont de même parité. Soient alors:

$$a_1, a_2 \dots\dots a_K$$

les points singuliers,

$$b_1, b_2, \dots\dots b_h$$

les points à apparence singulière.

La fonction φ_0 pourra s'écrire:

$$\sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{B_i}{x-a_i} + \sum \frac{C_i}{(x-b_i)^2} + \sum \frac{D_i}{x-b_i}$$

On aura d'ailleurs:

$$(3) \qquad C_i = \cancel{+}\frac{3}{4} \qquad\qquad D_i^2 + E_i = 0$$

en supposant pour fixer les idées que tous les points apparents soient distincts entre eux et distincts des points singuliers. Dans ces équations E_i représente le résultat de la substitution de b_i à la place de x dans la fonction

$$\varphi_0 - \frac{C_i}{(x-b_i)^2} - \frac{D_i}{x-b_i}$$

Posons maintenant:

$$\varphi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_h)(x-d_1)(x-d_2)\dots(x-d_{K-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_K)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\dots(x-c_m)^2}$$

où ~~les~~ α, les d et les c sont jusqu'à nouvel ordre indéterminés et où $2m = h-K$; il est clair que m ne peut être négatif, car si h était plus petit que K la réduction serait terminée. Nous allons disposer des indéterminées de telle façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \varphi$$

qui est rationnelle de degré -2 puisse se mettre sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$$

θ étant rationnel et de degré -1.

Soit en général $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ les infinis de θ, ~~A~~ $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p$ les résidus:

$$\theta = \sum \frac{\mu_i}{x - \lambda_i}$$

Soit θ_i et θ'_i le résultat de la ~~s~~ substitution de λ_i dans la fonction

$$\theta - \frac{\mu_i}{x-\lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu_i}{(x-\lambda_i)^2}$$

il viendra:

$$R = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx} = \sum \frac{\mu_i^2 + \mu_i}{(x-\lambda_i)^2} + 2\sum \frac{\theta_i \mu_i}{x - \lambda_i}$$

~~Si l'on appelle R_i~~ Si l'on a

$$R = \sum \frac{M_i}{(x-\lambda_i)^2} + \sum \frac{N_i}{x-\lambda_i}$$

on devra donc avoir:

$$M_i = \mu_i^2 + \mu_i$$

ce qui détermine les μ_i et par conséquent la fonction θ. On peut donc choisir arbitrairement les M_i et les λ_i mais non les N_i, d'où il résulte ~~qu'il~~ que pour qu'une fonction rationnelle de degré -2 ayant p infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$, il faut $p-1$ conditions; la p^e condition qui a ~~d~~ devrait de définir les p quantités N_i, c'est que leur somme doit être nulle.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il y a $m+h+K$ infinis doubles; il nous faut donc satisfaire à:

$$m + h + K - 1 = 3m + 2K - 1$$

conditions et pour cela nous ne disposons que de $m+K-1$ arbitraires. Il faut donc voir si h de nos conditions sont remplies d'elles-mêmes. Pour cela supposons qu'on retranche de R les deux termes qui deviennent infinis pour $x = \lambda_i$ et que l'on appelle R_i le résultat de la substitution de λ_i dans les termes restants, il est aisé de vérifier que l'on a:

$$(4) \qquad R_i = \theta_i^2 + (2\mu_i - 1)\,\theta'_i.$$

Parmi ~~nos~~ les infinis de R, considérons les points $b_1, b_2 \dots b_h$ par exemple le point b_i. Soit donc $b_i = \lambda_i$; il viendra:

$$M_i = -C_i = +\frac{3}{4} \qquad \mu_i^2 + \mu_i = \frac{3}{4}$$

Parmi les deux valeurs qui satisfont à cette condition nous choisirons

$$\mu_i = \frac{1}{2}.$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$(4 \text{ bis}) \qquad R_i = \theta_i^2$$

On a d'autre part:

$$N_i = 2\mu_i\theta_i = \theta_i \qquad\qquad N_i = -D_i.$$

de sorte que la condition (4 bis) se réduit à:

$$(4 \text{ ter}) \qquad R_i = D_i^2$$

Mais pour $x = b_i = \lambda_i$, la fonction f s'annule de sorte qu'il reste simplement

$$R_i = -E_i$$

et

$$E_i + D_i^2 = 0$$

de sorte que la condition (4 ter) se réduit à l'une des équations (3) et est satisfaite d'elle-même.

On pourra donc disposer des $m+K-1$ paramètres arbitraires pour ~~s~~satisfaire aux $m+K-1$ conditions restantes. On ~~prendra~~ envisagera ensuite la fonction

$$u = \frac{1}{\sqrt{f}}\left(\cancel{\theta \frac{dv}{dx}}\ \theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

qui satisfera à l'équation (2). Cette équation n'admettra plus les points à apparence singulière $b_1, b_2, -- b_h$. Car pour le point b_i, par exemple, supposons que l'on envisage le développement de ~~u~~. suivant les puissances croissantes de $x - b_i$. Le développement de v commencera (pour l'intégrale générale) par un terme de degré $-\frac{1}{2}$, celui de $\frac{dv}{dx}$ ~~par un~~ terme de degré $-\frac{3}{2}$; celui de θ par un terme de degré -1 et de coëfficient $\mu_i = \frac{1}{2}$. Le développement de $\theta v + \frac{dv}{dx}$ devrait donc commencer par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; mais les deux premiers termes se détruisent et il reste un terme de degré $+\frac{1}{2}$. D'un autre côté le ~~coëfficient~~ développement de $\frac{1}{\sqrt{f}}$ commence par un terme de degré $-\frac{1}{2}$ et par conséquent celui de u par un terme de degré 0. Le point ~~b_i n'est donc~~ apparent b_i a donc disparu. En revanche les points $d_1, d_2, -- d_{K-2}$ sont devenus des points à apparence singulière. L'équation (2) n'a donc que $K-2$

points à apparence singulière; elle est donc réduite.

Voici maintenant une méthode plus simple pour déterminer la fonction θ: On pose:

$$\theta = \sum \frac{P_i}{x-a_i} + \sum \frac{1}{2(x-b_i)} + \sum \frac{Q_i}{x-c_i}$$

Dans cette expression entrent $2m+K=h$ indéterminées à savoir, les K résidus P_i, les m résidus Q_i et les m infinis c_i. On les déterminera par les h conditions:

$$(5) \qquad \theta_i = -D_i.$$

On peut ~~mettre~~ ramener ces équations à être linéaires de la façon suivante: ~~Posons:~~ Soit Π le produit des $K+h$ facteurs $x-a_i$ et $x-b_i$. Posons:

$$\Pi_i = \frac{\Pi}{x-b_i} \qquad \Pi'_i = \frac{d\Pi_i}{dx}$$

Soient π_i et π'_i ce que deviennent Π_i et Π'_i quand on y fait $x=b_i$. Posons:

$$\theta = \frac{H}{\Pi K}$$

H et K étant des polynômes de degré ~~m et m~~ $m+h+K-1$ et m en x. ~~Nous aurons les relations:~~ Soient H_i, K_i, H'_i et K'_i ce que deviennent ~~H, K~~ ces deux ~~$2H-1$~~ polynômes et leurs dérivées quand on y fait $x=b_i$. Nous aurons les relations:

$$2H_i = \pi_i K_i$$

exprimant que le résidu relatif à l'infini $x=b_i$ est égal à $\frac{1}{2}$. D'autre part les relations ~~(4)~~ (5) deviennent

$$\cancel{2H'_i - K'_i\pi_i - K_i\pi'_i = 2D}$$

$$2H'_i - K'_i\pi_i - K_i\pi'_i + 2D_i\pi_i K_i = 0$$

Toutes ces relations sont linéaires par rapport aux coëfficients des polynômes H et K et suffisent pour les déterminer. D'où cette conclusion importante qu'il n'y a en général qu'une seule équation réduite dans une famille.

Supposons maintenant que h et K ne soient pas de même parité. Nous poserons:

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_h)\,x(x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\cdots(x-c_m)^2}$$

~~où~~:

où $2m = h - k$. Nous disposerons des $m+k-1$ indéterminées α, d et c de façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

puisse se mettre ~~entre~~ sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$$

On verrait comme dans le cas précédent que cela est toujours possible et, ~~en~~ faisant à l'aide des fonctions φ et θ la même transformation que plus haut, on arriverait à une équation (2) qui n'aurait plus d'autres point à apparence singulière que

$$0,\ d_1,\ d_2,\ \cdots\ d_{k-2}$$

et qui serait par conséquent réduite.

On peut employer la même analyse pour arriver à la réduction d'une équation linéaire:

1° Lorsque celle-ci est d'ordre supérieur au second

2° Lorsque ses coefficients sont algébriques au lieu d'être rationnels.

~~Supposons~~ ~~Les~~ Puisqu'il n'y a dans une même famille qu'un nombre fini de réduites, ~~on peut~~ les coëfficients numériques de l'équation réduite définissent la famille. Ce sont là les invariants dont il a été question plus haut.

§4 Fonctions zétafuchsiennes.

~~Soient~~ Soit g un groupe fuchsien quelconque que nous supposerons de la 1ère, de la 2e ou de la 6e familles. Soient:

$$(1)\qquad Z_1,\ Z_2,\ \cdots\cdots,\ Z_p$$

p fonctions de z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Supposons que lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, la fonction Z_i se change en

$$\Sigma\, \alpha_{ik} Z_k$$

c'est à dire en une ~~subst~~ combinaison linéaire des p fonctions (1)

Les substitutions

$$\left(z_i, \Sigma a_{ik} Z_k\right)$$

formeront évidemment un groupe G isomorphe à g et que nous appellerons zétafuchsien. Supposons maintenant que les fonctions Z soient uniformes et n'aient à l'intérieur du cercle fondamental d'autre singularité que des pôles.

~~Il arrive que.~~ Lorsque le groupe g est de la 2e et de la 6e famille, son polygone générateur R_0 aura ~~un~~ un ou plusieurs sommets sur la circonférence du cercle fondamental. Soit α l'un de ces sommets. Je supposerai que les fonctions Z n'ont dans le voisinage du point $z=\alpha$ que des singularités logarithmiques ~~dans~~ analogues à celles que présentent dans le voisinage de ce même point les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g; ~~c'est à dire que les fonctions Z~~ entrons dans quelques détails à ce sujet: les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g sont holomorphes en e^t où $t=\frac{\beta}{z-\alpha}$ et où β est un coëfficient convenablement choisi (Cf. Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, p 215). Dans le voisinage de ce ~~fonction~~ même point singulier, les fonctions Z seront de la forme:

$$P_1 e^{\lambda_1 t}\Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t}\Phi_2 + \cdots + P_q e^{\lambda_q t}\Phi_q$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_q$ sont holomorphes en e^t ~~et où les λ sont les~~ ~~α~~, où les λ sont des constantes et où $P_1, P_2, \ldots P_q$ sont des polynômes entiers en t de degrés ~~$p_1, p_2, \ldots p_q$~~ $n_1, n_2, \ldots n_q$.

On a d'ailleurs:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_q = p - q$$

Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que les fonctions Z sont des fonctions zétafuchsiennes.

Reprenons les équations (1) et (2) du paragraphe 1 et l'équation auxiliaire (3) de ce même paragraphe. Supposons que l'on ait choisi ~~une~~ cette dernière équation de façon que x et y soient des fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$ du rapport z des intégrales. Supposons de plus que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières. Si nous substituons à la place de x et de y, $f(z)$ et $f_1(z)$, les intégrales de cette équation deviendront des fonctions zétafuchsienne, de z.

Cela justifie la dénomination que j'ai adoptée. ~~En effet de même~~ On voit en effet qu'on ne peut pas obtenir toutes les intégrales elliptiques par le procédé de l'inversion qui ~~ne permet de calculer~~ ne donne que les intégrales de $1^{ère}$ espèce. Pour ~~les~~ des autres intégrales de 2^{de} espèce, on y substitue à la place de x une fonction elliptique de z et l'intégrale ~~d~~ cherchée devient une fonction Zéta de z qui augmente d'une constante lorsque la variable s'accroît d'une période. De même ici le procédé de l'inversion ne permet d'intégrer que les équations fuchsiennes. Pour les autres ~~foncti~~ équations linéaires, il faut, comme nous venons de le voir, substituer à la place de ~~x~~ x une fonction fuchsienne de z. Les intégrales deviennent alors des fonctions zétafuchsiennes de z qui subissent une substitution linéaire lorsque la variable subit une transformation du groupe g. Les fonctions zétafuchsiennes jouent donc ici le même rôle que les fonctions Zéta dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Cela posé soit

$$x = f(z),\ y = f_1(z) \text{ et } Z_1, Z_2, \ldots \ldots Z_p$$

~~une~~ deux fonctions fuchsiennes et un système de fonctions zétafuchsiennes admettant le groupe fuchsien g et le groupe zétafuchsien G. # ~~Les syst fonctions~~ Il est aisé d'en déduire une infinité de systèmes ~~$F_1 Z_1$~~ de fonctions zétafuchsiennes admettant les mêmes groupes. ~~Soient en effet. Désignons en effet par la notation F_{ik} un certain nombre de~~ Soient en effet $F_0, F_1, F_2, \ldots F_q$, $q+1$ fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Les fonctions :

#. (les fonctions x et y sont liées par une relation algébrique)

$$F_{\cancel{k}0} Z_1 + F_{\cancel{k}1} \frac{dZ_1}{dx} + F_{\cancel{k}2} \frac{d^2 Z_1}{dx^2} + \ldots + F_{\cancel{k}q} \frac{d^q Z_1}{dx^q},$$

$$F_{\cancel{k}0} Z_2 + F_{\cancel{k}1} \frac{dZ_2}{dx} + F_{\cancel{k}2} \frac{d^2 Z_2}{dx^2} + \ldots + F_{\cancel{k}q} \frac{d^q Z_2}{dx^q},$$

$$F_{\cancel{k}0} Z_p + F_{\cancel{k}1} \frac{dZ_p}{dx} + F_{\cancel{k}2} \frac{d^2 Z_p}{dx^2} + \ldots + F_{\cancel{k}q} \frac{d^q Z_p}{dx^q}.$$

formeront un système zétafuchsien.

Cherchons maintenant quelle est l'expression la plus générale d'un système zétafuchsien admettant les groupes g et G. Soit

$$T_1, T_2, \text{———} T_p$$

un pareil système: ~~Désignons~~ Posons pour abréger:

$$Z_i^q = \frac{d^q Z_i}{dx^q}$$

Considérons la matrice:

$$\| Z, Z', Z'', ---, Z^{p-1}, T \|$$

Pour abréger nous n'avons écrit qu'une ligne de cette matrice; mais il faut supposer qu'elle a p lignes et que dans la i^e ligne, chacune des lettres que j'ai écrites sans indice est affectée de l'indice i.

Soit maintenant ~~$\pm\Delta_{k-1}$~~ $(-1)^k\Delta_{k-1}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant dans cette matrice la k^e colonne; ~~on supposera que~~ on aura les relations:

$$T_i = -\frac{1}{\Delta_p}\left(\Delta_0 Z_i + \Delta_1 Z_i' + \Delta_2 Z_i'' + --- + \Delta_{p-1} Z_i^{p-1}\right)$$

Lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, les fonctions $Z_i, Z_i', ---. T_i$ subissent une même substitution S appartenant au groupe G, à savoir:

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k), \quad (Z_i', \Sigma a_{ik} Z_k), --- (T_i, \Sigma a_{ik} T_k)$$

Tous les déterminants $\Delta_0, \Delta_1, --- \Delta_p$ sont alors multipliés par un même facteur c'est à dire par le déterminant:

$$\Sigma \pm a_{ii}$$

Les rapports $\frac{\Delta_k}{\Delta_p}$ ne sont donc pas altérés; ce sont donc des fonctions fuchsiennes de z, c'est à dire des fonctions rationnelles de x et de y. Voici donc l'expression générale cherchée:

(4) $\quad T_i = F_0 Z_i + F_1 Z_i' + F_2 Z_i'' + --- F_{p-1} Z_i^{p-1}$

les F étant rationnels en x et y. ~~Mais les fonctions~~

Les fonctions Z_i^p ~~ayant~~ formant un système zétafuchsien, on aura:

(5) $\quad Z_i^p + F_{p-1} Z_i^{p-1} + --- + F_1 Z_i' + F_0 Z_i = 0$

les F étant rationnels en x et y. ~~Ainsi~~ Ainsi envisageons ~~tout système~~ des fonctions zétafuchsiennes quelconques.

$$Z_1, Z_2, --- Z_p$$

ayant pour groupes G et g ~~lorsqu'on les considère~~ Considérons-les comme fonctions de $x = f(z)$ ~~et que~~ où $f(z)$ ~~est une~~ est fonction fuchsienne admettant le groupe g, ~~satisfait~~

Elles satisferont toujours à une équation linéaire à coëfficients algébriques.

Il résulte de là que les fonctions T_i satisferont comme les fonctions Z_i elles-mêmes à une pareille équation. Mais en vertu de la relation (4), l'équation à laquelle satisfait T_i et celle à laquelle satisfait Z_i appartiennent à la même ~~famille~~. espèce.

Ainsi toutes les fonctions zétafuchsiennes qui ont même groupe satisfont à des équations linéaires à coëfficients rationnels en x et en y et qui sont toutes de la même espèce.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que le déterminant

$$\Sigma \pm a_{ii}$$

de toutes les substitutions du groupe G est égal à 1. Cette hypothèse est permise. En effet on peut toujours dans une équation linéaire d'ordre p, faire disparaître le coëfficient du terme en

$$\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}$$

et, si ce terme est nul, toutes les substitutions du groupe de l'équation ont leur déterminant égal à 1.

§ 5 Développements en Séries.

Supposons d'abord que le groupe fuchsien g soit de la 1ère famille

Soit s_i la i^{me} substitution du groupe ~~fuchsien~~ g

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

Soit S_i la substitution correspondante du groupe G. Ce sera une substitution linéaire de déterminant 1 que l'on pourra représenter par le tableau de ses coëfficients:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2p}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \cdots & a_{pp}^i \end{vmatrix}$$

La substitution S_i^{-1} sera alors représentée par le tableau:

$$\begin{vmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & \cdots & A_{1p}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & \cdots & A_{2p}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1}^i & A_{p2}^i & \cdots & A_{pp}^i \end{vmatrix}$$

où les A sont les mineurs du déterminant des a.

Nous allons considérer p fonctions rationnelles

$$H_1, H_2 \text{———} H_p$$

et p séries:

$$\zeta_1, \zeta_2, \text{———} \zeta_p$$

et nous adopterons les notations suivantes:

$$z s_i = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

$$H_\mu S_i = \sum A^i_{\mu\nu} H_\nu$$

$$\zeta_\mu S_i = \sum a^i_{\mu\nu} \zeta_\nu$$

Les séries ζ s'écriront alors:

$$\cancel{\zeta_\mu = \Sigma_i}$$

$$(1) \qquad \zeta_\mu(z) = \Sigma_i \left[H_\mu(z s_i)\right] S_i^{-1} \left[\frac{d(z s_i)}{dz}\right]^m$$

Supposons que l'on ait démontré que ces séries sont absolument convergentes; voyons quelles seront leurs propriétés. On aura:

$$\zeta_\mu(z) = \Sigma_i \left[H_\mu(z s_K s_i)\right] S_i^{-1} S_K^{-1} \left[\frac{d(z s_K s_i)}{dz}\right]^m$$

~~d'où~~ et de plus:

$$\zeta_\mu(z s_K) = \Sigma_i \left[H_\mu(z s_K s_i)\right] S_i^{-1} \left[\frac{d(z s_K s_i)}{d(z s_K)}\right]^m$$

d'où

$$\left[\zeta_\mu(z)\right] S_K = \Sigma \left[H_\mu(z s_K s_i)\right] S_i^{-1} \left[\frac{d(z s_K s_i)}{dz}\right]^m$$

et enfin:

$$(2) \qquad \zeta_\mu(z s_K) = \left[\zeta_\mu(z)\right] S_K \left[\frac{dz}{d(z s_K)}\right]^m$$

Écrivons la série (1) et la relation (2) avec les notations ordinaires, il vient:

$$\zeta_\mu = \Sigma_i \Sigma_\nu A^i_{\mu\nu} H_\nu\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

et

$$\zeta_\mu\left(\frac{\alpha_K z + \beta_K}{\gamma_K z + \delta_K}\right) = \Sigma_\nu a^K_{\mu\nu} \zeta_\nu(z) (\gamma_K z + \delta_K)^{2m}$$

Il reste à rechercher si les séries ~~sont~~ (1) sont absolument convergentes.

Pour cela envisageons la série

$$\lambda_{\mu\nu} = \Sigma_i^{\mathrm{mod}} \left[A^i_{\mu\nu} \cancel{\mathrm{mod}} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right]$$

et cherchons pour quelles valeurs de m cette série est convergente.

Nous allons donc chercher avec quelle rapidité croissent les coefficients $A^i_{\mu\nu}$. A cet effet envisageons les substitutions fondamentales du groupe G et leurs inverses. Si K est le nombre de ~~ces~~ substitutions, ~~f~~ fondamentales, nous aurons en tout $2Kp^2$ coefficients. Soit M le plus grand module de ces $2Kp^2$ coefficients.

Soit maintenant S_i une substitution quelconque du groupe G ~~de N~~ dont tous les coefficients aient leurs modules plus petits que N_i; soit d'ailleurs $\cancel{S_k}\,\Sigma$ une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses. Les modules de tous les coefficients de $\cancel{S_i S_k}\, S_i\Sigma$ seront plus petits que pMN; car chacun de ces coefficients est une somme de p monomes et chacun de ces monomes est le produit d'un coefficient de S_i par un coefficient de $\cancel{S_k}\,\Sigma$.

Cela posé, toute substitution S_i quelconque pourra toujours se mettre sous la forme suivante:

$$(3) \qquad S_i = \Sigma_1^{\alpha_1}\Sigma_2^{\alpha_2} \cdots \cdots \Sigma_p^{\alpha_p}$$

Chacune des lettres $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots \Sigma_p$ désigne une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses, la même substitution pouvant d'ailleurs se retrouver plusieurs fois dans la suite. Les exposants $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_p$ sont entiers positifs. La somme $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$ s'appelle l'exposant de la substitution. Dans le cas où la substitution S_i peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (3), son exposant est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$.

Il résulte de cette définition que les modules des coefficients d'une substitution dont l'exposant est σ sont plus petits que $(Mp)^\sigma$

~~Ne Envisageons main~~ Le groupe G est isomorphe au groupe g. Il en résulte que l'exposant de S_i est le même que celui de la substitution correspondante s_i du groupe g si l'isomorphisme est holoédrique.

Il est plus petit, en général si l'isomorphisme est mériédrique. Dans tous les cas il ne peut pas être plus grand.

Soit d'un autre côté R la distance à l'origine d'un transformé $z s_i$ du point z. ~~du point $z s_i$ à l'origine des coordonnées~~, distance évaluée au point de vue de la géométrie non-euclidienne; je veux dire que R est la L de la droite $O - z s_i$.

On peut trouver une relation entre R et l'exposant σ de la substitution ~~s~~ s_i que nous appellerons aussi pour abréger l'exposant du point $z s_i$. En effet ~~σ est au plus égal~~ supposons pour fixer les idées que les points z et O soient tous deux intérieurs au polygone R_0. La droite $z s_i - O$ dont la L est égale à R traversera un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \dots R_i$ et σ sera au plus égal au nombre n de ces polygones. Quelle relation y a-t-il maintenant entre R et n.

Considérons d'abord ~~deux~~ le polygone R_0; la L de tout arc de courbe joignant deux points du périmètre de ce polygone appartenant à deux côtés non adjacents sera plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai λ. Considérons maintenant un polygone R_1 adjacent à R_0 le long d'un côté C_1 et envisageons un arc de courbe joignant un point d'un côté C_0 de R_0 à un point du côté C_2 de R_1 et traversant le côté C_1. Je supposerai de plus que ces trois côtés C_0, C_1, C_2 n'ont aucun point commun. (Cf Théorie des groupes fuchsiens p 31.) La L d'un pareil arc restera toujours plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai μ.

~~Tout Il reste entendu que dans tout ce qui va suivre, les mots droites, distances, perpendiculaires,~~ centres d'un cercle, polygone, polygone convexe etc ~~etc~~, devront s'entendre au sens non euclidien. Du point z comme centre décrivons un cercle C assez petit pour ~~que~~ contenir à son intérieur aucun des ~~points~~ transformés de z. On pourra ensuite ~~trouver~~ construire un polygone P ~~convexe~~ dont tous les sommets $z_1, z_2, \dots z_q$ seront des transformés de z que nous définirons plus complètement plus loin ~~et qui sera tout entier extérieur au cercle C~~. J'appellerai σ_0 le plus grand ~~des~~ exposants des sommets $z_1, z_2, \dots z_q$. Cela posé ~~soit~~ soit R le rayon du cercle C ~~R le rayon du cercle C~~, Soit D la distance d'un point quelconque ~~du plan été~~ point ~~z et D' la distance de ce~~ même point ~~du plan~~ à

~~celui des sommets $z_1, z_2, \ldots z_q$ dont il est le plus rapproché. Les~~ On peut toujours trouver deux quantités r et ρ telles que ~~points dont~~ que les points du plan qui satisfont à l'inégalité

$$D - D' < r.$$

sont tous intérieurs à un cercle décrit du point z comme centre avec ~~un certain~~ le rayon ρ.

En effet ~~soit~~ M un point quelconque du plan, joignons zM et soient D et D_K les distances du point M aux points z et z_K. Quand le point M s'éloigne du point z en suivant la droite zM, la différence $D - D_K$ va constamment en augmentant ; il en est donc de même de $D - D'$ qui ~~est~~ n'est autre chose, par définition, que la plus grande des différences $D - D_K$. Lorsque le point M s'éloigne indéfiniment en suivant la droite zM, $D - D_K$ tend vers une certaine limite que j'appelle λ_K et $D - D'$ vers la limite λ' qui n'est autre chose que la plus grande des quantités λ_K. Or λ_K ~~qui~~ qui est une fonction de la distance zz_K et de l'angle $\hat{z_K z M}$ ne peut devenir négative que si cet angle devient obtus et ne peut devenir nulle que si la distance zz_K s'annule, ou si l'angle $z_K z M$ ~~est~~ devient droit. Or d'après les hypothèses faites, quelle que soit la direction zM, ~~il y aura~~ on pourra toujours ~~l'un des~~ trouver un sommet z_K du polygone P tel que l'angle $z_K z M$ soit plus petit que $\frac{\pi}{4}$. Donc on pourra toujours trouver un nombre r^* qui ~~reste const~~ satisfasse à l'inégalité

$$r^* < \lambda' + \varepsilon$$

quelle que soit la direction zM, ~~et~~ ε étant une quantité positive. ~~Il importe de remarquer que le signe < exclut l'égalité.~~ Donc les points de la droite zM qui sont tels que

$$D - D' < r$$

sont à une distance finie du point z ; on pourra toujours trouver une ~~ra~~ longueur ρ qui soit ~~constamment~~ plus grande que ~~cette~~ la distance de chacun de ces points au point z. Donc tous ces points sont à l'intérieur du cercle décrit du point z comme centre avec ρ pour rayon.

~~Supposons que l'on considère les divers cercles qui sont tangents à la fois au cercle fondamental et au cercle C. On~~ pourra toujours choisir

~~le polygone P de telle~~ façon que ~~l'un au moins~~ chacun des

~~Si maintenant~~ Considérons enfin un arc de courbe ~~qui~~ qui vient couper successivement ~~tous~~ divers côtés de divers polygones R_i et de façon que tous ces côtés viennent converger en un même point. Ce point sera un sommet de l'un des polygones et comme le groupe g est supposé de la 1ère famille, ce sera un sommet de la 1ère catégorie auquel ne viendra aboutir qu'un nombre *fini* de côtés. J'appellerai h la limite supérieure que ce nombre fini ne pourra dépasser. On aura alors:

$$n < R\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{\mu}\right)$$

inégalité que nous pourrons écrire:

$$n < \alpha R \quad \text{ou} \quad 6 < \alpha R$$

α étant une constante.

Mais si l'on se reporte au paragraphe 1 du mémoire sur les fonctions fuchsiennes, on verra que l'on a; (K étant une constante)

$$\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} < \frac{K}{e^{2R} + e^{-2R} + 2} < K e^{-2R}$$

~~et que~~ de plus que la série $\sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$ est convergente.

On a d'ailleurs, ~~d'a~~ après ce que nous venons de voir:

$$\operatorname{mod} A^i_{\mu\nu} < (Mp)^6 < e^{R\alpha \log(Mp)}$$

On peut donc prendre m assez grand pour que:

$$2m - 4 > \alpha \log(Mp)$$

d'où:

$$\operatorname{mod} A^i_{\mu\nu} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} < \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

et par conséquent pour que la série $\lambda_{\mu\nu}$ définie plus haut soit convergente. La limite que l'on est ainsi conduit à attribuer au nombre m n'est pas précise. Reprenons maintenant les séries (1); on peut trouver une limite supérieure du module des p fonctions:

$$H_\mu(z\, s_i)$$

pourvu qu'aucune d'elles ne devienne infinie sur le cercle fondamental (Cf, Fonctions Fuchsiennes § 1) Les séries (1) sont donc absolument convergentes.

C. Q. F. D.

~~Il~~ La relation (2) montre ensuite que si l'on divise les

p fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ par une même fonction thêtafuchsienne θ, les quotients

$$Z_1 = \frac{\xi_1}{\theta},\ Z_2 = \frac{\xi_2}{\theta}, \ldots\ Z_p = \frac{\xi_p}{\theta}$$

forment un système zétafuchsien.

D'où la conclusion suivante: avec un groupe fuchsien g de la 1ère famille et un groupe zétafuchsien G isomorphe au premier, on peut toujours construire une infinité de systèmes zétafuchsiens.

Donc on peut toujours construire une infinité d'équations linéaires admettant un groupe donné pourvu que ce groupe soit isomorphe à un groupe fuchsien de la 1ère famille.

Cette remarque est importante au point de vue de l'intégration algébrique de ces équations. Les savants qui ont abordé jusqu'ici la question de cette intégration algébrique, ont cherché à former ~~les~~ groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il restait à savoir s'il existait des équations admettant ces groupes. Cette question est maintenant résolue, puisque tout groupe d'ordre fini peut toujours être regardé comme isomorphe à un groupe fuchsien de la 1ère famille.

Qu'arrive-t-il lorsque le groupe G est d'ordre fini? et quelles conséquences ~~que les équations~~ Il est ~~alors~~ mériédriquement isomorphe au groupe g; si dans ce groupe g on distingue les substitutions auxquelles correspond dans le groupe G la substitution ~~et~~ identique, ces substitutions formeront un sous-groupe g' contenu dans g.

Les fonctions $x = f(z)$ et $y = f_1(z)$ et, en général, les fonctions fuchsiennes de groupe g, pourront être regardées comme des cas particuliers des fonctions fuchsiennes de groupe g'. D'un autre côté, les séries $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ se réduisent ~~d'elles-mêmes~~ à des séries thêtafuchsiennes de groupe g'; et les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ à des fonctions fuchsiennes de groupe g'. Il y a donc une relation algébrique entre Z_i et x. L'intégrabilité algébrique des équations linéaires auxquelles satisfont les fonctions Z_i est donc mise en évidence.

Nous pouvons dès à présent indiquer l'expression analytique des générale des fonctions Zétafuchsiennes. Nous avons vu en effet que si

$$Z_1^h, Z_2^h, \dots Z_p^h \qquad h = 1, 2, \dots p$$

sont p systèmes Zétafuchsiens et si

$$T_1, T_2, \dots, T_p$$

fin du §5 normal

représente un système Zétafuchsien quelconque, on a:

2

$$T_\mu = F_1 Z_\mu^1 + F_2 Z_\mu^2 + \dots + F_p Z_\mu^p$$

$F_1, F_2, \dots F_p$ étant des fonctions fuchsiennes que l'on peut toujours considérer comme le quotient de deux séries thétafuchsiennes. Voici ~~g~~par conséquent quelle est la forme générale de la fonction T_μ.

Soient ~~ξ_μ^1~~

$$\xi_\mu^1, \xi_\mu^2, \dots \xi_\mu^p$$

$$\theta, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_p$$

p séries de la forme (1) et $p+1$ séries thétafuchsiennes, on aura:

$$T_\mu = \frac{\theta_1 \xi_\mu^1 + \theta_2 \xi_\mu^2 + \dots + \theta_p \xi_\mu^p}{\theta}$$

~~On a ainsi les intégrales de l'équation linéaire (1) du paragraphe sous fo~~

§6 Décomposition en éléments simples ~~Second mode de développement~~.

9

Soit

(1) $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\cancel{p}\,\nu}$

un système zétafuchsien, que je supposerai de ~~appartenant à~~ la 1ère famille, comme dans le paragraphe précédent. Soit $f(z)$ ~~la~~ une fonction fuchsienne de la 1ère famille ayant même groupe fuchsien G que ce système. Je supposerai, pour fixer les idées, que cette fonction est de genre 0 et que toutes les autres transcendantes fuchsiennes de même groupe en sont des fonctions rationnelles.

Je vais reprendre les notations de la page 240 du §5 du mémoire sur les fonctions fuchsiennes

~~Je vais reprendre les notations du §5 du mémoire sur les fonctions fuchsiennes et je renverrai particulièrement à la page 240 de ce paragraphe.~~ C'est pourquoi j'ai supposé plus haut que le nombre des fonctions du système zétafuchsien (1) était égal à ν et non pas à p, comme je l'avais admis jusqu'ici, afin d'éviter toute confusion avec le nombre que j'ai appelé p dans le ~~paragraphe cité~~.

10

Considérons l'intégrale:

$$(2)\quad \int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^{-h} dz$$

prise le long du contour S défini à ladite page 240.
Je dis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, pourvu que h soit suffisamment grand.
En effet nous pourrons aisément trouver une limite supérieure M_1 du module de $\frac{1}{z-x}$. Supposons maintenant que le module de $\frac{df}{dz}$ reste inférieur à M_2 le long du périmètre de R_0; il restera inférieur à

$$M_2 H^{2h}$$

le long du périmètre de S. Supposons enfin que que le long du périmètre de R_0 les modules des p fonctions:

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_p$$

restent inférieurs à M_3. ~~Soit~~ Cherchons la limite supérieure du module de ces mêmes fonctions le long du périmètre ~~de R_i~~ du polygone R_i en supposant que la substitution s_i qui change R_0 en R_i soit d'exposant 6. Soit S_i la substitution de G qui correspond à s_i. Nous avons vu au paragraphe précédent que les coëfficients de S_i sont plus petits que

$$e^{a6}$$

a étant une constante convenablement choisie. Donc le long de R_i le module des p fonctions Z est plus petit que

$$pM_3 e^{a6}$$

Considérons en particulier les polygones R_i qui forment la bordure de S. Leur exposant est, d'après le paragraphe précédent plus petit que $\frac{b}{a}(R+\lambda)$, où b est une constante convenablement choisie. D'où ce ~~$b(R+\lambda)$~~ résultat:

$\frac{b}{a}(R+\lambda)$

$$\mathrm{mod}\, Z_i < pM_3\, e^{b(R+\lambda)}$$

le long de S. La quantité sous le signe $\int$ a donc son module plus petit que

$$(8)\quad pM_1M_2M_3\, e^{b(R+\lambda)} H^{2h}$$

Si l'on se reporte à la valeur de H (fonctions fuchsiennes page 241) on verra que cette expression (3) tend vers 0 pourvu que:

$$b < 4h$$

L'intégrale (2) tend donc aussi vers 0 d'où l'on peut conclure que les ~~fonctions~~ p fonction

$$(4) \qquad Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

peuvent se développer en séries de la façon suivante:

$$(5) \qquad \sum \frac{A}{z-a} + \sum \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots + \sum \frac{A_m}{(z-a)^m}$$

où les a sont les infinis et les A les résidus. Si la fonction n'admet que des infinis simples, cette série ~~peut se~~ se réduit à

$$\sum \frac{A}{z-a}.$$

Quand on connaîtra les infinis et les résidus ~~des~~ de ces p fonctions à l'intérieur de R_0, on connaîtra tous les infinis et tous les résidus de ces mêmes fonction et par conséquent la série (5). Supposons que a soit un infini des fonctions (4) situé à l'intérieur de R_0 et que nous supposerons simple pour fixer les idées. Soient:

$$A_1, A_2, \dots, A_p$$

les résidus des p fonctions (4) correspondant à cet infini. Les points:

$$a S_i = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}$$

seront aussi des infinis simples de ces mêmes fonctions (4). Nous écrirons comme plus haut:

$$A_\mu S_i = \sum a_{\mu\rho} A_\rho$$

si la substitution S_i s'écrit:

$$(Z_\mu, \sum a_{\mu\rho} Z_\rho)$$

Or nous avons:

$$Z_\mu(z S_i) = [Z_\mu(z)] S_i = \sum a_{\mu\rho} Z_\rho(z)$$

et

$$Z_\mu(z S_i)\left[\frac{df(z S_i)}{d(z S_i)}\right]^{-h} = \left[\sum a_{\mu\rho} Z_\rho(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}\right]\left(\frac{dz S_i}{dz}\right)^h$$

~~Faisons $z = a S_i^{-1}$ et~~ Multiplions l'identité précédente par:

12

$$\frac{z-a}{\cancel{(z-a)}(z-a s_i^{-1})}$$ et faisons $\overset{z=a}{\cancel{z=a s_i^{-1}}}$

il viendra~~,~~ en appelant

$$A'_1, A'_2, \ldots A'_p$$

les résidus des p fonctions (4) pour $z = \cancel{a s_i^{-1}}\, a s_i$

$$(\gamma_i a + \delta_i)^2 A'_\mu = \sum a_{\mu\rho} A_\rho (\gamma_i a + \delta_i)^{-2h}$$

d'où:

$$A'_\mu = (A_\mu S_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{-2h-2}.$$

Telle est la valeur des résidus cherchés. Réunissons ensemble les termes de la série (5) qui correspondent aux infinis de la forme $a s_i$; nous trouverons la série suivante:

$$(6) \qquad \Phi_\mu(z,a) = \sum \frac{(A_\mu S_i)}{(z - a s_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

De sorte que chaque fonction (4) se trouve décomposée en une somme d'un nombre fini d'éléments simples de la forme $\Phi_\mu(z, a)$. ~~Ce~~

~~Considérée comme fonction de a, z étant une constante, la série $\Phi_\mu(z,a)$ est analogue aux séries ζ du paragraphe précédent, avec cette différence que chacune des substitutions S_i du groupe G y est remplacée par la substitution inverse. La série ζ est en effet de la forme:~~

~~$$\sum H_\mu(z s_i)\, S_i^{-1} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$~~

~~Si l'on y remplace z par a, m par $h+1$, S_i par S_i^{-1} et $H_\mu(a)$ par:~~

~~$$\frac{A_\mu}{z-a}$$~~

~~on retombera sur la série $\Phi_\mu(z,a)$~~

~~Cherchons maintenant quelle relation il y a entre $\Phi_\mu(z,a)$ et $\Phi_\mu(z s_K, a)$. Il vient:~~

~~$$\Phi_\mu(z, a) = \sum \frac{A_\mu S_i S_K}{(z - a s_i s_K)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}(\gamma_K a s_i + \delta_K)^{2h+2}}$$~~

~~et:~~

~~$$\Phi_\mu(z s_K, a) = \sum \frac{A_\mu S_i S_K}{(z s_K - a s_i s_K)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}(\gamma_K a s_i + \delta_K)^{2h+2}}$$~~

~~Le second membre peut s'écrire:~~

$$\sum \frac{(A_\mu S_i S_k)(\gamma_k z + \delta_k)}{(z - a s_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}(\gamma_k a s_i + \delta_k)^{2h+1}}$$

Mais on a d'autre part:

$$\frac{\left[\Phi_\mu(z,a)\right] S_k}{(\gamma_k z + \delta_k)^{2h}} = \sum \frac{(A_\mu S_i S_k)(\gamma_k z + \delta_k)}{(z - a s_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}(\gamma_k z + \delta_k)^{2h+1}}$$

En retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, on trouve:

$$(7) \quad \left[\Phi_\mu(z s_k, a)\right] S_k (\gamma_k z + \delta_k)^{2h} - \Phi_\mu(z,a) = \sum \frac{(A_\mu S_i) P(a s_i, z)}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}(\gamma_k a s_i + \delta_k)^{2h+1}}$$

$P(a s_i, z)$ désignant un polynôme entier en $a s_i$ et en z.
Le second membre, considéré comme fonction de a est une série de la forme ζ du paragraphe précédent, avec cette différence toutefois que chacune des substitutions de G est remplacée par son inverse. Nous pouvons donc dire que le groupe zétafuchsien de cette série ζ est le groupe inverse de G. De plus cette série ζ ne devient jamais infinie à l'intérieur du cercle fondamental.
Les séries ζ qui n'ont pas d'infini et qu'on peut appeler par conséquent séries ζ holomorphes, s'expriment linéairement à l'aide d'un certain nombre q d'entre elles. Ce qui précède nous fournit un moyen de déterminer ce nombre q.
Soient

$$\begin{array}{l} \zeta_1^1, \zeta_2^1, \dots \dots \zeta_\nu^1 \\ \zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots \dots \zeta_\nu^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta_1^q, \zeta_2^q, \dots \dots \zeta_\nu^q \end{array}$$

q systèmes de séries ζ holomorphes. ~~Nous~~ Soit maintenant

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots \dots \zeta_\nu$$

un système de séries ζ holomorphes s'exprimant linéairement à l'aide des q premiers; cela veut dire qu'on aura:

~~$\xi_\mu = b_1 \xi_\mu^1 + b_2 \xi_\mu^2 + \ldots + b_q \xi_\mu^q$~~

les coëfficients b restant les mêmes quel que soit μ.

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \ldots z_{q+1}$$

$q+1$ quantités quelconques. Nous pourrons toujours trouver $q+1$ nombres C tels que:

$$(8) \quad \begin{aligned} C_1 \xi_\mu^1(z_1) + C_2 \xi_\mu^1(z_2) + \ldots + C_{q+1} \xi_\mu^1(z_{q+1}) &= 0 \\ C_1 \xi_\mu^2(z_1) + C_2 \xi_\mu^2(z_2) + \ldots + C_{q+1} \xi_\mu^2(z_{q+1}) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 \xi_\mu^q(z_1) + C_2 \xi_\mu^q(z_2) + \ldots + C_{q+1} \xi_\mu^q(z_{q+1}) &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent tels que

$$(9) \quad C_1 \xi_\mu(z_1) + C_2 \xi_\mu(z_2) + \ldots + C_{q+1} \xi_\mu(z_{q+1}) = 0$$

pour toutes les séries ξ_μ holomorphes.

Cela posé, considérons l'expression:

$$\Lambda_\mu(z) = C_1 \Phi_\mu(z, z_1) + C_2 \Phi_\mu(z, z_2) + \ldots + C_{q+1} \Phi_\mu(z, z_{q+1})$$

Il viendra:

$$\Lambda_\mu(z s_k) = \sum C_i \Phi_\mu(z s_k, z_i)$$

et si l'on pose de même

$$\Lambda_h(z) = C_1 \Phi_h(z, z_1) + C_2 \Phi_h(z, z_2) + \ldots + C_{q+1} \Phi_h(z, z_{q+1})$$

(en changeant l'indice μ en h, mais sans changer la valeur des coëfficients C.) on aura:

$$\Lambda_\mu(z s_k) S_k = \cancel{\sum b_{\mu h} \Lambda_h(z s_k) = \sum b_{\mu h} C_i \Phi_h(z s_k, z_i)} = \sum C_i \left[\Phi_\mu(z s_k, z_i) S_k\right]$$

d'où, en tenant compte des équations (7) et (9)

~~$\left[\Lambda_\mu(z s_k) S_k\right](\gamma_k z + \delta_k)^{2h} - \Lambda_\mu(z) = \sum C_i \xi_\mu(z_i) = 0.$~~

Note 1.

1 Parmi les séries ξ on peut en envisager qui sont plus simples que les autres. En effet dans les p séries:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$$

entrent p fonctions rationnelles arbitraires:

$$H_1, H_2, \ldots, H_p$$

Supposons que toutes les fonctions H soient nulles, excepté ~~une d'elles que j~~ H_ν, la série ξ_μ se réduira à

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) A^i_{\mu\nu} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

2 Les séries de cette forme où $p-1$ des fonctions arbitraires H sont nulles peuvent s'appeler séries ξ simples. ~~On aura alors, en appelant ξ_μ une série complexe où aucune des fonctions H~~

~~Donnons~~ Choisissons maintenant ~~aux~~ p fonctions H quelconques et formons un système de séries ξ_μ à l'aide de ces p fonctions. Formons ensuite avec chacune de ces p fonctions, avec H_ν par exemple, un système de séries simples $\xi_{\mu\nu}$, les $p-1$ autres fonctions étant supposées nulles, on aura :

$$\xi_\mu = \xi_{\mu 1} + \xi_{\mu 2} + \cdots + \xi_{\mu p}$$

ce qui montre qu'une série ξ quelconque peut être regardée comme une somme de séries simples.

Voyons maintenant quelle est l'expression analytique des séries ξ au moyen des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnant naissance à un système de fonctions zétafuchsiennes. D'abord, afin d'éviter des complications inutiles et qui ne tiennent pas au fond des choses, je supposerai que le groupe G est non-seulement de la 1ère famille, mais encore du genre 0. Le système zétafuchsien considéré :

$$Z_1, Z_2, \ldots Z_p$$

regardé comme fonction de la transcendante fuchsienne $x = f(z)$ satisfera à l'équation :

$$(4)\qquad \frac{d^pZ}{dx^p} + \sum \varphi_k \frac{d^kZ}{dx^k} = 0$$

où les coefficients φ_k sont rationnels en x seulement. Je supposerai pour simplifier que cette équation (4) soit du 2d ordre ~~puis toujours supposer que le système zétafuchsien ait été choisi~~ et qu'elle soit réduite au sens donné à ce mot au paragraphe 3 de ce mémoire. Je l'écrirai :

$$(4)\qquad \frac{d^2Z}{dx^2} + \varphi_2 Z = 0.$$

Les infinis de φ_2 ~~seront de deux sortes~~ c'est-à-dire seront : les points singuliers ~~proprement dits que j'appellerai~~ $a_1, a_2, \ldots a_n$ et ~~les~~ ∞

Je supposerai qu'il n'y a pas de points à apparence singulière ou plutôt s'il y en a je les regarderai comme des points singuliers ordinaires et je les ferai correspondre à un sommet de R_0 ~~que j'appellerai $b_1, b_2, \ldots b_q$. De plus je supposerai que le point ∞ soit un point singulier proprement dit.~~ J'appellerai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ les ~~valeurs de dz~~ sommets de R_0 qui correspondront aux $n+1$ points

3

singuliers $a_1, a_2, \ldots a_n, \infty$; ~~$\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_q$ seront les points intérieurs à R_0 et correspondant aux q points à apparence singulière b.~~

J'appellerai ~~R_i~~ $\frac{2\pi}{\beta_i}$, comme dans le paragraphe 5 ~~du~~ mémoire sur les fonctions fuchsiennes, la somme des angles ~~de R_0 qui forment~~ du cycle dont fait partie le sommet α_i. Les racines γ_i et $1-\gamma_i$ de l'équation déterminante relative à $x = a_i$ et à l'équation différentielle (4) ~~seront~~ devront être des multiples de $\frac{1}{\beta_i}$. Les intégrales Z_1 et Z_2 de l'équation (4) regardées comme fonctions de z ~~seront~~ infinies d'ordre $(\gamma_i - 1)\beta_i$ pour $z = \alpha_i$. Leurs dérivées $Z_1' = \frac{dZ_1}{dx}$ et $Z_2' = \frac{dZ_2}{dx}$ seront infinies d'ordre $\gamma_i\beta_i$. Voici maintenant quelle est l'expression générale d'une série ξ_1 quelconque :

$$(5) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \left[\cancel{f(x)}\, F(x) Z_1 + F_1(x) Z_1' \right] = \xi_1 .$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ étant des fonctions rationnelles de x

Nous allons chercher si l'on peut déterminer les deux fonctions rationnelles de telle façon que l'expression (5) et l'expression conjuguée

$$(5 \text{ bis}) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \left(F Z_2 + F_1 Z_2' \right) = \xi_2$$

ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

~~On tire de là~~ Si l'on a, comme nous le ~~supposerons~~ pouvons supposer puisque le coëfficient de $\frac{dZ}{dx}$ est nul dans l'équation (4) :

$$Z_1 Z_2' - Z_2 Z_1' = 1.$$

Il vient :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F = \xi_1 Z_2' - \xi_2 Z_1'$$

et

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F_1 = \xi_1 Z_2 - \xi_2 Z_1$$

Il suit de là que les deux fonctions F et F_1 ne peuvent devenir infinis que pour les points singuliers $z = \alpha_i$, la première d'ordre $(\gamma_i + m)\beta_i - m$ au plus (en z) et la seconde d'ordre $(\gamma_i + m - 1)\beta_i - m$ ~~au plus~~ au plus.

~~$(\gamma_i + m - 1)\beta_i$~~

On aura donc :

$$F = \frac{\theta(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n}}$$

et

$$F_1 = \frac{\theta_1(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1 - 1}(x-a_2)^{\lambda_2 - 1} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n - 1}}$$

~~$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ étant les plus petits nombres qui satisfont $d\alpha$~~

4

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sont les plus ~~petits~~ grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$(6) \qquad \lambda_i \leq \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}$$

et où θ et θ_1 sont des polynômes entiers en x ~~dont~~ qu'il s'agit maintenant de déterminer plus complètement. ~~les degrés p et q_1~~ q et q_1

~~Pour $x = \infty$, l'équation~~ (4) ~~admet une équation déterminante dont les~~ racines sont γ_{n+1} et $1-\gamma_{n+1}$ de telle sorte que $\gamma_{n+1}\beta_{n+1}$ soit un nombre entier plus grand que $\frac{\beta_{n+1}}{2}$. Les expressions (5) et (5 bis) deviendront infinies d'ordre

$$(7) \qquad m(\beta_{n+1}+1) + \beta_{n+1}(q+\gamma_{n+1} - \Sigma\lambda_i)$$

ou d'ordre

$$(7\text{ bis}) \qquad m(\beta_{n+1}+1) + \beta_{n+1}(q_1+\gamma_{n+1} - 1 - \Sigma\lambda_i + n)$$

si l'expression (7 bis) est plus grande que l'expression (7)

On devra donc avoir, pour que (5) et (5 bis) restent finis.

$$(8) \qquad \begin{aligned} q &\leq \Sigma\lambda_i - \gamma_{n+1} - m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) \\ q_1 &\leq \Sigma\lambda_i - \gamma_{n+1} - m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - n + 1. \end{aligned}$$

de sorte que nous prendrons pour q et q_1 les plus grands nombres entiers satisfaisant à ces inégalités (8). Ces inégalités sont compatibles pourvu que m soit suffisamment grand. Il y a alors une infinité de séries ξ n'admettant pas d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental et ces séries s'expriment linéairement à l'aide de:

$$q + q_1 + 2 = \varphi(m)$$

d'entre elles. Ce nombre $\varphi(m)$ est le plus grand entier de même parité que $n+1$ qui satisfasse à l'inégalité:

~~(9) $\varphi(m) \leq 2\Sigma\lambda_i - 2\gamma_{n+1} - 2m\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - n + 3$~~

Envisageons ~~Supposons maintenant~~ l'expression suivante:

~~(10) $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ Supposons maintenant que dans l'expression~~s (5) ~~et (5 bis)~~ l'exposant m soit entier négatif pendant que les fonctions rationnelles F et F_1 sont quelconques. Cherchons si l'on peut choisir ces deux fonctions rationnelles restées arbitraires, de telle façon que les expressions (5) et (5 bis) ~~aient des~~ un certain nombre d'infinis donnés ~~et n'en aient pas d'autres~~. Pour cela il faut ~~et il suffit~~ que le nombre des infinis donnés ~~ne soit pas supérieur à un certain nombre $\psi(m)$ qu'il s'agit maintenant~~

~~de déterminer. Soient $b_1, b_2 \ldots b_q$ les q infinis simples donnés de ξ_1 et~~

ξ_2, ~~où je suppose~~ j'écris pour abréger $q = \psi(m)$

~~F et F_1 n'auront alors d'autres infinis que $b_1, b_2, \ldots b_q$ qui seront simples et $a_1, a_2 \ldots a_n$ qui seront au plus d'ordre~~

$$\gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i} \quad \text{pour } F \text{ pour } a_i \quad (\text{par rapport à } x)$$

et
$$\gamma_i + m - 1 - \frac{m}{\beta_i} \quad \text{pour } F_1.$$

Nous aurons donc:

$$F = \frac{\theta(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n}(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)}$$

$$F_1 = \frac{\theta_1(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1-1}(x-a_2)^{\lambda_2-1} \ldots (x-a_n)^{\lambda_n-1}(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)}$$

Les λ étant toujours des nombres entiers définis par les inégalités (6) où m est maintenant négatif, et θ et θ_1 étant deux polynomes en x dont il s'agit maintenant de déterminer les degrés ϖ et ϖ_1.

Ces degrés doivent être choisis de telle sorte que ~~F et F_1 soient infinis d'ordre au plus en x pour $x = \infty$.~~ (5) et (5 bis) soient finis pour $x = \infty$. Or ces deux expressions sont d'ordre:

$$m(\beta_{n+1} + 1) + \beta_{n+1}(\varpi - q + \gamma_{n+1} - \Sigma \lambda_i)$$

et
$$m(\beta_{n+1} + 1) + \beta_{n+1}(\varpi_1 - q + \gamma_{n+1} - 1 - \Sigma \lambda_i + n) \quad \text{en } z$$

On devra donc avoir:

$$q \geq \varpi + \gamma_{n+1} - \Sigma \lambda_i + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

$$q \geq \varpi_1 + \gamma_{n+1} - 1 + n - \Sigma \lambda_i + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

d'où l'on tire puisque $\psi(m)$ est la plus petite valeur que puisse prendre q:

$$\cancel{\psi(m) \geq \gamma_{n+1} + n - 1 - \Sigma \lambda_i + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)}$$

7

Nous devons adjoindre au groupe zétafuchsien G, le groupe zétafuchsien corrélatif G_1 défini de la façon suivante; soit:

$$(Z_i, \Sigma a_{ik} Z_k)$$

une substitution correspondante de G, la substitution correspondante de G_1 sera:

$$(\Sigma a_{ki} T_k, \; T_i)$$

en appelant:

$$T_1, T_2, \ldots T_p$$

l'un des systèmes zétafuchsiens engendrés par par le groupe G_1. On sait que dans la théorie des formes ~~binaires~~ algébriques et en particulier dans celle des formes appelées contravariants et mixed-concomitants, ~~les groupe corrélatifs joue un~~ la considération de la substitution corrélative d'une substitution linéaire donnée joue un rôle fort important.

Considérons maintenant l'expression suivante:

$$(19) \qquad Z_1 T_1 + Z_2 T_2 + \dots + Z_p T_p$$

Quand la variable z subit une substitution du groupe fuchsien g les Z_i subissent la substitution correspondante de G et les T_i subissent la substitution correspondante de G_1. Il en résulte que l'expression (19) elle-même demeure invariable. C'est donc une fonction fuchsienne de z.

On verra plus loin le rôle des fonctions zétafuchsiennes et surtout des séries ζ engendrées par le groupe corrélatif G_1.

Remarquons maintenant que dans le cas particulier de $p = 2$, ~~à~~ la substitution:

$$S_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

du groupe G, correspond la substitution:

$$\cancel{\begin{vmatrix} d_i & -c \\ & d_i \end{vmatrix}} \qquad \begin{vmatrix} d_i & -c_i \\ -b_i & a_i \end{vmatrix}$$

du groupe G_1. Ces deux substitutions ont évidemment mêmes multiplicateurs d'où il suit que les quantités que nous avons appelées plus haut

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n, \gamma_{n+1}$$

sont les mêmes pour les deux groupes G et G_1.

~~Si on suppo~~ Supposons maintenant $p > 2$; si $x = a$ est un point singulier pour lequel ~~les équations~~ racines de l'équation déterminante relative ~~aux~~ à une équations différentielle engendrée par le groupe G, ait pour racines: (4)

$\cancel{\varepsilon_1}$ $\cancel{T_1, T}$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p$$

l'équation déterminante relative à ~~l'~~ l'une des équations (4) ~~différentielles~~ engendrées par le groupe G_1, aura pour racines:

$$\Sigma\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \Sigma\varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \dots \quad \Sigma\varepsilon - \varepsilon_p - \frac{p(p-1)}{2}$$

~~Le nombre $\varphi(m)$ n'est d'ailleurs qu'un maximum.~~

5 Nous venons de voir que F ne pouvait ~~être~~ devenir ~~infini~~ pour $x = a_i$ infini d'un ordre plus grand que λ_i et F_1 ~~ne~~ pouvait devenir infini d'un ordre plus grand que $\lambda_i - 1$.

Cherchons maintenant un nombre μ_i tel que si F est infini d'ordre μ_i et F_1 infini d'ordre $\mu_i - 1$ pour $x = a_i$; ξ_1 et ξ_2 soient certainement finis.

Il arrive alors que ~~FZ_1 et $F_1 Z_1'$ devien~~ $FZ_1\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ et $F_1 Z_1'\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ deviennent infinis d'ordre

$$\mu_i + \gamma_i - 1 - m\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right)$$

d'où il résulte que μ_i est le plus grand nombre entier satisfaisant à l'inégalité

$$\mu_i \leq 1 - \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}$$

Pour $x = \infty$, $\frac{dx}{dz}$ devient infini d'ordre $1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}$, Z_1 ~~devient infini~~ d'ordre γ_{n+1} et Z_1' d'ordre $\gamma_{n+1} + 1$. Il en résulte que F ne peut pas être infini d'ordre plus élevé que:

$$\lambda_{n+1} \leq -m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - 1$$

~~ni~~ F_1 d'ordre plus élevé que $\lambda_{n+1} + 1$.

D'autre part si F est infini d'ordre μ_{n+1} et F_1 d'ordre $\mu_{n+1} + 1$. ξ_1 et ξ_2 seront, ~~en généra~~ au plus d'ordre

$$\mu_{n+1} + \gamma_{n+1} + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

de sorte que si μ_{n+1} satisfait à l'inégalité:

$$\mu_{n+1} \leq -m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - \gamma_{n+1}$$

on sera certain que ξ_1 et ξ_2 sont finis.

Posons maintenant:

$$F = f\varphi \qquad F_1 = f_1\varphi_1$$

$f, \varphi, f_1, \varphi_1$ étant des fonctions rationnelles devenant infinies respectivement d'ordre μ_i, $\lambda_i - \mu_i$, $\mu_i - 1$, $\lambda_i - \mu_i$ pour $x = a_i$ et d'ordre μ_{n+1}, $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$, $\mu_{n+1} + 1$, $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ pour $x = \infty$. Pour que cette décomposition ne puisse pas se faire d'une infinité de manières, nous supposerons qu'un coëfficient quelconque de f et un de f_1 sont assujettis à avoir une valeur donnée.

Voici alors le nombre ~~Il reste alors~~ des coëfficients restés arbitraires:

dans f $\quad \Sigma\mu_i + \mu_{n+1}$

dans f_1 $\quad \Sigma\mu_i + \mu_{n+1} + 1 - n$

dans φ et dans φ_1 $\quad \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + \lambda_{n+1} - \mu_{n+1} + 1$

en tout:

$$2\sum \lambda_i + \cancel{2\lambda_{n+1}} + 3 - n.$$

Mais entre ces coëfficients il y a certaines relations dont il faut chercher le nombre. Considérons un quelconque des infinis a_i ~~et~~, posons pour abréger $a_i = 0$ et supprimons partout l'indice i. Soit:

$$\cancel{(10)}\ (7)\ \begin{cases} \varphi = A x^{\mu-\lambda} + A' x^{\mu-\lambda+1} + A^2 x^{\mu-\lambda+2} + \dots\dots\dots + A^{\lambda-\mu-1} x^{-1} + \varphi' \\ \varphi_1 = A_1 x^{\mu-\lambda} + A'_1 x^{\mu-\lambda+1} + \dots\dots\dots + A_1^{\lambda-\mu-1} x^{-1} + \varphi'_1 \end{cases}$$

φ' et φ'_1 étant finis pour $x = 0$. On peut maintenant toujours supposer que Z_1 et Z_2 aient été choisis de ~~telle sorte que l'on ait~~ manière à être

$\cancel{Z_1 \left(\frac{dx}{dz}\right)^m}$ ~~et~~ $\cancel{Z_2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^m}$ ~~soient~~ respectivement infinis d'ordre

$\cancel{Z_2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^m Z}$ $(\gamma - 1)$ et $-\gamma$ pour $x = 0$; car si cela n'était pas il suffirait de remplacer Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β γ et δ étant des coëfficients convenablement choisis. Cela posé, imaginons qu'il n'y ait aucune relation entre les coëfficients A des expressions (7); l'expression (5) sera infinie d'ordre:

$$(8)\qquad \lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \gamma - 1$$

et l'expression (5 bis) d'ordre:

$$\lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma$$

L'expression (5 bis) est ~~infinie~~ donc finie en vertu de l'inégalité (6). Mais pour que l'expression (5) soit finie, il faut qu'il y ait entre les coëfficients A des expressions (7), ~~autant~~ des relations dont le nombre est précisément le plus petit entier qui est égal ou supérieur à ~~qu'il y a d'entiers contenus dans~~ l'expression (8), c'est à dire: $\lambda - \mu$.

Le même raisonnement s'appliquerait pour $x = \infty$ et on trouverait qu'on doit avoir entre les coefficients de φ et φ_1 $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ relations pour que (5) et (5 bis) restent finis pour $x = \infty$. Il y a donc en tout

$$\sum \lambda_i - \sum \mu_i + \cancel{\lambda_{n+1}} - \cancel{\mu_{n+1}}$$

relations et il reste:

$$\sum \lambda_i + \sum \mu_i + 3 - n$$

coëfficients arbitraires. Dans cette expression $\sum \lambda_i$ signifié

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots\dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}.$$

Ainsi toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies infinies s'expriment ~~rationnellement~~ linéairement à l'aide de

$$\sum \lambda_i + \sum \mu_i + 3 - n \qquad \text{d'entre elles.}$$

On trouverait un résultat analogue pour le cas de $p > 2$.

13 Mais on peut pousser plus loin encore cette décomposition en éléments simples. L'identité (6) pourra en effet ~~encore~~ s'écrire:

~~Soit Soit maintenant comme dans le paragraphe précédent~~

$$\left(Z_\mu, \sum a^i_{\mu\nu} Z_\nu\right)$$

~~la substitution S_i, il viendra~~:

$$\Phi_\mu = \sum_\nu \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu} A_\nu}{(z - aS_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

ou encore:

$$\Phi_\mu = A_1 \Phi_{\mu.1} + A_2 \Phi_{\mu.2} + \cdots + A_p \Phi_{\mu.p}$$

en posant:

$$\Phi_{\mu\nu} = \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu}}{(z - aS_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que; si les fonctions (4) admettent les infinis simples

$$z_1, z_2, \ldots z_q$$

à l'intérieur de R_0, et si elles admettent l'infini z_K respectivement avec les résidus:

$$B_{K.1}, B_{K.2}, \ldots B_{K.p}$$

il viendra pour la μ^e des fonctions (4) l'identité:

$$Z_\mu(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \sum_K \sum_\nu B_{K.\nu} \Phi_{\mu\nu}(z, z_K)$$

qui nous montre cette fonction décomposée en éléments simples. On arriverait à un résultat analogue pour le cas où cette fonction admettrait des infinis multiples.

Voyons ce que sont ces éléments simples, et pour cela regardons dans l'expression ~~$\Phi(\mu,\nu)$~~ $\Phi_{\mu\nu}(z, a)$ z comme une constante et a comme la variable.

Cherchons maintenant à former les séries ξ simples du paragraphe précédent avec le groupe G_1 corrélatif de G ~~du~~ de même paragraphe ~~précédent~~ a étant toujours la variable; nous trouverons:

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu(aS_i)\, a^i_{\nu\mu} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}$$

en faisant:

$$H_\nu(a) = \frac{1}{z - a} \qquad m = h + 1:$$

il viendra:

$$\xi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}(z, a)$$

Ainsi la transcendante ~~fonction~~ $\Phi_{\nu\mu}$ regardée comme fonction de a est une fonction ξ

~~dérivée de~~ admettant le groupe G_1 corrélatif de G.

Nous allons supposer maintenant $p=2$ pour fixer les idées et nous allons ~~reprendre~~ étudier de plus près la ~~les fonctions~~ décomposition en éléments simples des fonctions

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}\left(F Z_1 + F_1 Z_1'\right) = \Lambda_1$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}\left(F Z_2 + F_1 Z_2'\right) = \Lambda_2$$

Z_1, Z_2, Z_1', Z_2' ayant la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent, et F et F_1 désignant des fonctions rationnelles en x. Il est clair que Λ_1 et Λ_2 sont des fonctions de la forme (4) auxquelles, par conséquent, on peut appliquer tout ce que nous venons de dire.

Dans ce qui va suivre, les lettres $\beta_i, \gamma_i, \lambda_i, \mu_i$ auront la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent, et nous poserons:

$$m = h+1.$$

Cherchons la condition pour que les fonctions Λ_1 et Λ_2 ne deviennent pas infinies pour $x = a_i$. Il faut que F et F_1 deviennent nuls d'un ordre suffisamment grand et ~~cet~~ c'est d'abord ordre qu'il s'agit de déterminer. Supposons pour le faire plus aisément que Z_1 et Z_2 soient respectivement infinies d'ordre $\gamma_i - 1$ et $-\gamma_i$. Cela est toujours possible, car si cela n'était pas on remplacerait Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des coëfficients convenablement choisis. Si alors F devient nul d'ordre δ_i et F_1 d'ordre $\delta_i + 1$; Λ_1 et Λ_2 seront respectivement infinies d'ordre:

$$h\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i$$

et

$$h\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i - \delta_i$$

On doit donc avoir d'abord:

$$\delta_i \geq h\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i$$

ou ce qui revient au même.

$$\delta_i \geq \mu_i - 1$$

Cette condition est suffisante pour que Λ_2 ne devienne pas infini. Pour que Λ_1 ~~ne devienne pas infini~~ reste également fini, il faut encore qu'il y ait certaines relations entre les coëfficients de F et de F_1.

Supposons maintenant que F et F_1 deviennent nuls d'ordre δ_{n+1} et $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$ et Z_1 et Z_2 infinis d'ordre γ_{n+1} et $1-\gamma_{n+1}$. Il en résultera que Λ_1 et Λ_2 deviendront infinis d'ordre:

$$-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}$$

et

$$-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1 - \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}$$

§ 5

~~Il en résulte que~~ Par conséquent Λ_2 reste fini pourvu que

$$\delta_{n+1} \geq 1 - \gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

ou ce qui revient au même:

$$\delta_{n+1} \geq \mu_{n+1} + 3.$$

Si en outre il y a certaines relation entre les coëfficients de F et de F_1, Λ_1 ~~sera~~ restera fini. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que δ_i et δ_{n+1} sont égaux à leurs limites, c'est à dire que l'on a

$$\delta_i = \mu_i - 1$$
$$\delta_{n+1} = \mu_{n+1} + 3$$

~~Si les, for Quelles sont~~ Considérons maintenant les relations dont il vient d'être question et qui doivent exister entre les coëfficients de F et de F_1 pour que les deux fonctions Λ, Λ_2 restent finies pour $z = \alpha_i$ et pour $z = \alpha_{n+1}$ et avant tout cherchons quel en est le nombre. ~~Considérons d'abord $z = \alpha_i$. Posons $\alpha_i = 0$ pour fixer les idées et supprimons partout les indices. On a alors:~~

$$\cancel{Z_1 \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} = 1}$$

~~Envisageons d'abord $z = \alpha_i$~~ Si F et F_1 étaient des fonctions rationnelles quelconques, assujetties seulement à être nulles d'ordre δ_i et $\delta_i + 1$ (ou δ_{n+1} et $\delta_{n+1} - 1$ pour $z = \alpha_{n+1}$) Λ_1 serait infini d'ordre $h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i$ $\left(\text{ou } -h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}\right)$. Dans le développement de Λ_1 suivant les puissances croissantes de $x - \alpha_i$ il y aurait donc $E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$ $\left(\text{ou } E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] \text{ pour } z = \alpha_{n+1}\right)$ termes infinis. #

\# Nous désignons par $E'(x)$ le plus petit entier satisfaisant à la condition

$$E'(x) \geq x$$

et par $E(x)$ le plus grand entier tel que

$$E(x) \leq x.$$

Le nombre des relations nécessaires pour que les deux Λ restent finis pour $z = \alpha_i$ est donc égal à

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

ou bien

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1\right] - \delta_i$$

ou, ainsi qu'il est aisé de le voir.

$$\lambda_i - 1 - \delta_i = \lambda_i - \mu_i$$

En ce qui concerne le point $z = \alpha_{n+1}$, le nombre des relations est égal à:

$$E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

ou

$$E'\left[\gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] - \delta_{n+1}$$

ou enfin:

$$\lambda_{n+1} + 3 - \delta_{n+1} = \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$$

On a en effet:

$$\lambda_i = E\left[\gamma_i + (h+1)\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]$$

$$\lambda_{n+1} = E\left[\gamma_{n+1} - 1 - (h+1)\left(1+\frac{1}{p_{n+1}}\right)\right]$$

$$E'(x) = - E(-x) \qquad E(x+1) = E(x)+1$$

$$E\left(\frac{a-1}{b}\right) + E\left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \qquad \cancel{E\left(\frac{a+1}{b}\right) + E\left(-\frac{a}{b}\right) =}$$

a et b étant des entiers

Le nombre total des relations est donc ainsi de:

$$\sum \lambda_i - \sum \mu_i$$

~~Supposons~~ considérons maintenant les diverses fonctions Λ qui admettent q infinis simples donnés, ~~...~~ sans en admettre d'autres. Toutes ces fonctions s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles. Quel est ce nombre? Les fonctions F et F_1 admettent ces q infinis donnés. Mais comme elles doivent être nulles respectivement d'ordre δ_{n+1} et d'ordre $\delta_{n+1}-1$ pour $x=\infty$; elles admettront $q-\delta_{n+1}$ et $q-\delta_{n+1}+1$ zéros. Mais la fonction F admet ~~le zéro d~~ δ_i fois le zéro α_i et la fonction F_1 l'admet δ_i+1 fois. Il reste donc:

$$q - \sum \delta \text{ zéros arbitraires dans } F$$

et $q - \sum\delta + 1 - n$ dans F_1

Il y a donc en tout dans F et F_1

$$2q - 2\sum\delta + 3 - n = 2q - 2\sum \mu_i + n - 3$$

coëfficients arbitraires.

Mais nous n'avons pas tenu compte des relations qui doivent exister entre les coefficients de F et de F_1 et dont nous venons de déterminer le nombre. ~~Il~~ Il faut donc retrancher de l'expression qui précède, le nombre de ces relations c'est à dire

$$\sum \lambda_i - \sum \mu_i$$

Il restera ainsi

$$Q = 2q - \sum \lambda_i - \sum \mu_i + n - 3$$

coëfficients réellement arbitraires.

Ainsi toutes les fonctions Λ qui admettent les q infinis donnés s'expriment linéairement à l'aide de Q d'entre elles.

Dans toute ~~tran~~ décomposition en éléments simples, il y a un nombre que l'on peut appeler fondamental et qui joue un rôle très important. Supposons qu'il s'agisse de décomposer en éléments simples les fonctions qui appartiennent à une certaine catégorie C. On doit supposer que la somme de deux fonctions appartenant à cette catégorie C appartient également à ~~cette même catégorie~~ C; ce n'est que dans ces conditions qu'on peut être conduit à chercher une décomposition en éléments simples. Il peut arriver que les éléments simples fassent eux-mêmes partie de C; c'est ainsi que dans la décomposition des fractions rationnelles, on est conduit à des éléments de la forme $\frac{A}{x-a}$ qui sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Dans ce cas, nous dirons que le nombre fondamental est égal à 0. Mais le contraire peut arriver également. Ainsi dans la décomposition des fonctions doublement périodiques, les éléments simples sont de la forme ~~AZ~~ $A\frac{d}{dx}\log\Theta(x-a)$ et ne sont pas des fonctions doublement périodiques. Mais il existe des fonctions doublement périodiques qui sont des sommes de deux éléments simples ~~qui sont doublement péri~~ seulement, et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement. Dans ce cas, le nombre fondamental sera égal à 1. En général s'il existe des fonctions ~~toutes les fonctions~~ de la catégorie C décomposables en $m+1$ éléments simples ~~peuvent s'exprimer linéairement à l'aide~~ seulement et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions de la catégorie C peuvent s'exprimer linéairement, le nombre fondamental sera égal à m, pourvu que m soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Ainsi dans la décomposition des fonctions rationnelles de x et de y, (y étant lié à x par une relation algébrique $\varphi(x,y)=0$) décomposition découverte par M. Roch, le nombre fondamental est égal ~~au~~ au genre de la relation $\varphi=0$. Envisageons de même la décomposition de la fonction $\Lambda(z)$ que nous avons considérée aux pages 238, 266, 275 et 284 du mémoire sur les fonctions fuchsiennes en éléments simples de la forme

$$A_K\ \Phi(z, z_K)$$ (loco citato p. 242)

~~D~~Dans le mémoire cité nous avons déterminé le nombre fondamental relatif à ~~la~~ cette décomposition. C'est ainsi que dans le cas du genre 0 et de la 2e famille (loco citato p. 276) nous avons trouvé pour ce nombre:

$$n(m-1) - m.$$

Quel est maintenant le nombre fondamental relatif à la décomposition qui nous occupe ici, c'est à dire à la décomposition des la fonction Λ_1 en éléments simples de la forme

$$A_K \Phi_{1.1}(z, z_K) \quad \text{ou} \quad A_K \Phi_{1.2}(z, z_K).$$

Pour cela il nous suffit d'énoncer le résultat suivant; si m est le nombre fondamental d'une décomposition quelconque en éléments simples, toutes les fonctions qui ~~sont la somme~~ s'expriment linéairement à l'aide de q éléments donnés peuvent être exprimées linéairement à l'aide de $q - m$ d'entre elles.

~~Or~~ Nous avons vu que les fonctions ~~de la forme~~ Λ qui admettent q infinis donnés

$$z_1, z_2, \text{——} z_q$$

peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de

$$2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3.$$

d'entre elles. Or ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des $2q$ éléments simples:

$$\Phi_{1.1}(z, z_1), \Phi_{1.1}(z, z_2), \text{——}, \Phi_{1.1}(z, z_q)$$

$$\Phi_{1.2}(z, z_1), \Phi_{1.2}(z, z_2), \text{——}, \Phi_{1.2}(z, z_q)$$

Donc le nombre fondamental est égal à:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n.$$

Dans la théorie des fonctions fuchsiennes et des fonctions $\Lambda(z)$ engendrées par ces transcendantes, le nombre fondamental jouissait d'une propriété remarquable que je vais rappeler.

Soit $f(h)$. ~~Le~~ le nombre fondamental relatif à la décomposition en éléments simples des ~~la~~ fonctions de la forme:

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x, y)$$

où F désigne une fonction rationnelle des deux fonctions fuchsiennes x et y.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que les fonctions de la forme

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,y)$$

(où F a la même signification que plus haut) qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental, s'expriment linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles.

On avait l'identité:

$$\psi(h) = \varphi(h+1)$$

C'est de cette identité que nous avons tiré une conclusion importante: à savoir que toute fonction de la forme (α) pouvait être représentée par une série thétafuchsienne (de la forme (4) § 1, Mémoire sur les Fonctions Fuchsiennes)

De même ici soit:

$$\psi(h) = \Sigma \lambda_i + \Sigma \mu_i + 3 - n.$$

le nombre fondamental relatif à la décomposition de Λ_1.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que toutes les fonctions de la forme:

$$(\beta) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \left[F Z_1 + F_1 Z_1'\right]$$

(forme (5) du § précédent) puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles. On aura encore:

$$(\gamma) \qquad \psi(h) = \varphi(h+1)$$

Voyons si on pourra tirer de cette identité la même conclusion que dans le paragraphe cité, c'est à dire si on pourra démontrer que toutes les fonctions de la forme (β) peuvent s'exprimer par l'une des séries ξ du paragraphe précédent.

Supposons que toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental et qui correspondent à un exposant m égal à $h+1$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\theta(h+1)$ d'entre elles. On aura évidemment:

$$(\delta) \qquad \theta(h+1) \leq \varphi(h+1)$$

puisque toute ~~fo~~ série ξ est égale à une fonction de la forme (β)

Si l'on a:

$$\theta = \varphi$$

toute fonction de la forme (β) pourra réciproquement s'exprimer par une série ζ. ~~Si a~~ Il n'en serait plus de même si l'on avait

$$\theta < \varphi.$$

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \text{——}, z_q$$

q quantités quelconque, intérieures au cercle fondamental. Soient

$$A_1, A_2, \text{---}, A_q$$
$$B_1, B_2, \text{---}, B_q$$

$2q$ quantités que nous asujettirons plus loin à diverses conditions. Soit maintenant $\zeta_1(z)$ une série ζ ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et $\zeta_2(z)$ sa conjuguée. ~~Assujettissons~~ Nous Assujettissons les quantités A et B à la condition suivante:

Ces séries ζ sont engendrées par le groupe fuchsien G et par le groupe zétafuchsien G_1 corrélatif de G

$$(\mathcal{E}) \quad A_1\zeta_1(z_1) + A_2\zeta_1(z_2) + \cdots + A_q\zeta_1(z_q) + B_1\zeta_2(z_1) + B_2\zeta_2(z_2) + \cdots + B_q\zeta_2(z_q) = 0$$

Ecrivons cette même relation pour toutes les séries ζ qui, restant finies à l'intérieur du cercle fondamental, correspondent à un exposant m égal à $h+1$. Nous aurons de la sorte asujetti les A et les B à $\theta(h+1)$ conditions distinctes.

Posons alors:

$$(\zeta) \quad \begin{aligned} \Lambda_1(z) &= \sum A_k \Phi_{1.1}(z, z_k) + \sum B_k \Phi_{1.2}(z, z_k) \\ \Lambda_2(z) &= \sum A_k \Phi_{2.1}(z, z_k) + \sum B_k \Phi_{2.2}(z, z_k) \end{aligned}$$

~~Si l'on~~ Posons maintenant:

$$\Phi_{1.1}(z s_i, z_k) - \left(\frac{dz s_i}{dz}\right)^{+h} \left[a_i \Phi_{1.1}(z, z_k) + b_i \Phi_{2.1}(z, z_k)\right] = \eta_1(z_k)$$

$$\Phi_{1.2}(z s_i, z_k) - \left(\frac{dz s_i}{dz}\right)^{+h} \left[a_i \Phi_{1.2}(z, z_k) + b_i \Phi_{2.2}(z, z_k)\right] = \eta_2(z_k)$$

en supposant que

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

soit le tableau à double entrée des coëfficients de la substitution S_i correspondant à s_i.

Il est clair que ~~$\eta_1(z_k)$ et~~ $\eta_1(z)$ et $\eta_2(z)$ sont deux séries ζ conjuguées ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Donc en vertu des relations $(\mathcal{E})$ on a:

$$\Lambda_1(zs_i) = \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h} \left[a_i \Lambda_1(z) + b_i \Lambda_2(z)\right]$$

On en conclut que Λ_1 et Λ_2 sont deux fonctions de la forme:

$$\Lambda_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (F Z_1 + F_1 Z_1')$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} (F Z_2 + F_1 Z_2')$$

dont les identités (ζ) nous donnent la décomposition en éléments simples. Or les coëfficients A et B de cette décomposition ne sont assujettis qu'à $\theta(h+1)$ conditions. Le nombre $\theta(h+1)$ est donc au moins égal au nombre fondamental, d'où l'inégalité:

$$\cancel{(\zeta)} \qquad \theta(h+1) \geq \psi(h)$$

De la comparaison ~~des inégalités~~ de cette inégalité avec avec (γ) et (δ) on déduit:

$$\theta(h+1) = \varphi(h+1)$$

Donc toute expression de la forme (β) qui ne devient pas infinie peut s'exprimer par une série ζ.

On en déduit aisément qu'il en est de ~~toute ex~~ même d'une expression de la forme (β) qui devient infinie.

<u>Donc toute fonction zétafuchsienne est le quotient d'une série ζ par une série thêtafuchsienne</u>.

Nous avons, il est vrai, pour fixer les idées, supposé $p = 2$, mais la démonstration et le résultat subsistent quand p est plus grand que 2. (Fin du § 6)

Copier dans l'ordre suivant:

	feuille	page
fin du § 5 normal	8	1
1	9	2
2	9	3
3	9	4
4	10	1
5	11	1
6	11	2

	feuille	page	
$\sqrt{7}$	10	2	
$\sqrt{8}$	10	3	ici finit le §5 anormal
			Ici commence le §6
$\sqrt{9}$	8	1	
$\sqrt{10}$	8	2	
$\sqrt{11}$	8	3	
$\sqrt{12}$	8	4	
$\sqrt{13}$	11	3	
$\sqrt{14}$	11	3	
$\sqrt{15}$	12	1	

A partir de ce moment copier à la suite les 4 pages de la feuille 12 et les 3 pages de la feuille 13. et clore ensuite le §6.

§ 7 Extension à la Deuxième Famille.

Tout ce qui précède ne s'applique encore qu'aux groupes fuchsiens de la 1ère famille et aux groupes zétafuchsiens qui leur sont isomorphes. Il nous reste à étudier les fonctions zétafuchsiennes dont le groupe fuchsien g est de la 2de ou de la 6e familles. Parmi ces fonctions nous distinguerons deux espèces ; la 1ère espèce dont nous nous occuperons d'abord comprendra les fonctions dérivées d'un groupe zétafuchsien G jouissant des propriétés suivantes. Le groupe fuchsien g étant de la 2de ou de la 6e familles, le polygone générateur R_0 aura ~~au moins un~~ des sommets sur le cercle fondamental. A chacun de ces sommets correspond une substitution parabolique du groupe g qui admet ce sommet comme point double. ~~Ces~~ Les substitutions ainsi définies sont les substitutions paraboliques ~~fondamentales~~ du groupe g, ~~et~~ les substitutions du groupe G qui leur correspondent en vertu de l'isomorphisme s'appelleront *substitutions critiques*.# Formons pour chacune de ces substitutions critiques l'équation aux multiplicateurs que l'on obtient, comme on sait, en écrivant le tableau à double entrée des coefficients, ajoutant $-S$ à chacun des termes de la diagonale principale et égalant à 0 le déterminant ainsi obtenu. Si toutes les racines de ces équations relatives à toutes les substitutions critiques ont pour module l'unité, le groupe G et les fonctions zétafuchsiennes qui en dérivent seront de la 1ère espèce. Soit

$$(1) \qquad Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_p$$

un système zétafuchsien, et $x = f(z)$ une fonction fuchsienne ayant même groupe. Nous avons vu que Z_i considéré comme fonction de x satisfait à une équation linéaire à coefficients algébriques. Quelles sont les conditions que doit remplir cette équation pour que le système (1) soit de la 1ère espèce. Il faut et il suffit que si l'on envisage les différents points singuliers de cette équation, toutes les équations déterminantes correspondantes aient toutes leurs racines réelles. La seconde espèce dont il sera question au paragraphe suivant comprend toutes les autres fonctions

Il ne faut pas confondre les substitutions critiques du groupe G et les substitutions fondamentales de ce même groupe. Les substitutions fondamentales de G seront, dans ce qui va suivre, celles qui correspondent aux substitutions de g qui changent un côté de R_0 en son conjugué, ou à leurs inverses. Les substitutions critiques de G seront celles qui corresp. aux substitutions paraboliques de g qui n'altèrent pas l'un des sommets de la 2e sorte de R_0 ou à leurs inverses.

[illegible]

Je dis que si le groupe G est de la 1^ère^ espèce, les séries ξ du paragraphe (5) seront absolument convergentes.

Considérons en effet une substitution quelconque S du groupe G. Nous pourrons la mettre sous la forme suivante.

$$(2) \qquad S = \Sigma_1^{\alpha_1} \Sigma_2^{\alpha_2} \text{ --- --- } \Sigma_n^{\alpha_n}$$

où les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2,$ —— Σ_n sont choisies parmi les substitutions fondamentales ~~du groupe et leurs inverses~~ ou des substitutions critiques et ~~dont~~ où les exposants $\alpha_1, \alpha_2,$ - —, sont des entiers positifs. Parmi les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2,$ — Σ_n il y en aura en général un certain nombre ~~que~~ que j'appellerai $T_1, T_2,$ — T_q qui seront des substitutions critiques, et j'appellerai $\beta_1, \beta_2,$ --- β_q leurs exposants. J'appellerai $\gamma_1, \gamma_2,$ --- γ_{n-q} les $n - q$ exposants qui affectent des substitutions fondamentales ~~non critiques~~. Nous allons chercher comme dans le paragraphe ~~(5)~~ 5 une limite supérieure des coefficients de S, et pour cela nous envisagerons la somme ~~des~~ des logarithmes exposants β, $\Sigma L\beta$ ~~$\Sigma\beta$~~ et celle des exposants γ, $\Sigma\gamma$. Soit d'abord M ~~le plus grand des~~ un nombre plus grand que les modules des coëfficients des substitutions fondamentales ~~non critiques~~ et de leurs inverses. ~~Considérons~~ Soit ensuite ~~une~~ T une quelconque des substitutions critiques; nous pourrons toujours la mettre sous la forme suivante:

$$T = \cancel{UT}\ UVU^{-1}$$

où V est une substitution canonique. J'appelle ainsi, à l'exemple de plusieurs géomètres, toute substitution de la forme suivante:

$$(3) \qquad (z_1, z_2, \text{—}, z_p;\ m_1 z_1, m_2 z_2, \text{---}\ m_p z_p)$$

ou bien, plus généralement,

$$(4) \qquad (z_1, z_2, \text{—}\ z_p;\ m_1 z_1, m_2 z_2 + n_2 z_1; m_3 z_3 + n_3 z_2, \ldots, m_p z_p + n_p z_{p-1})$$

où n_q est nul si m_q est différent de m_{q-1}.

J'aurai donc à considérer à part ~~à part~~ les substitutions U et les substitutions V. Je supposerai que le nombre M défini plus haut est plus grand que les modules de tous les coëfficients de U et de U^{-1}.

Maintenant nous avons

$$T^\beta = UV^\beta U^{-1}$$

et il s'agit de trouver une limite supérieure des coefficients de V^β
Si V est de la forme (3), tous les coëfficients de V^β ont pour modules 0 ou 1. Si V est de la forme (4), on pourra trouver un polynôme entier en β de degré p au plus, à coëfficients positifs et qui sera plus grand que les modules de tous les coëfficients de V^β. Plus simplement on pourra toujours trouver un nombre M'_x assez grand pour que l'expression $M'_x \beta^p$ soit plus grande que tous ces modules. Pour simplifier encore nous supposerons $M'_x = M$, en prenant pour la valeur commune de ces deux nombres un nombre assez grand pour satisfaire à toutes les conditions que nous leur avons imposées.

~~Si l'on se rappelle maintenant que si~~ En appelant M_1 et M_2 la limite supérieure des modules des coefficients de deux substitutions S_1 et S_2, les modules des coefficients de $S_1 S_2$ seront plus petits que:

$$pM_1M_2.$$

Si donc on se reporte à l'expression (2) de la substitution S, on verra que ses coëfficients sont tous plus petits que:

$$(5)\quad (pM)^{\Sigma\gamma+3q}\, e^{p\Sigma L\beta}$$

Cherchons maintenant une limite supérieure des deux exposants qui entrent dans cette formule, à savoir $\Sigma\gamma+3q$ et $\Sigma L\beta$. Soit zs le transformé ~~de l'a~~ du point z par la substitution s du groupe g qui correspond à S. Joignons z et zs par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental et soit R la L de cet arc de cercle. C'est en fonction de R que je veux exprimer les limites supérieures cherchées.

Considérons l'un quelconque des sommets du polygone R_0 ou de l'un de ses transformés, et décrivons autour de ce sommet un petit cercle défini de la manière suivante. Si ce sommet est de la 1re sorte et situé à l'intérieur du cercle fondamental, il devra être le ~~la distance de ce~~ centre de ce ~~sommet à tous les points de~~ petit cercle γ ~~distance~~ au point de vue non-euclidien,) ~~devra être constante~~. Si le sommet

et de la 2e sorte ~~et~~ situé sur le cercle fondamental, le petit cercle devra toucher le cercle fondamental en ce sommet même. Je puis toujours supposer que ces cercles ont été pris assez petits pour n'avoir aucun point commun. Il arrivera alors que la L d'un arc de courbe qui ira d'un point de l'un de ces cercles à un point d'un autre de ces petits cercles restera toujours supérieure à une ~~longueur donnée~~ certaine limite λ.
L'arc de cercle $z.z_0$ défini plus haut traversera un certain nombre de ces petits cercles et ce nombre ne pourra pas être supérieur à $\frac{R}{\lambda}$.
Maintenant ~~si~~ nous considérons un arc de courbe ne traversant aucun de nos petits cercles et joignant deux points appartenant à deux côtés différents du polygone R_0 ou d'un de ses transformés, la L de cet arc restera toujours supérieure à une certaine limite μ.
Voyons maintenant quelle est la signification géométrique des exposants β et γ qui entrent dans l'expression (5). L'arc $z.z_0$, en allant du point z au point z_0 traverse ~~un des~~ divers côtés ~~du~~ appartenant au polygone R_0 ou à ses transformés ~~et de ce que nous avons vu au paragraphe 5, la somme des exposants β et γ est précisément~~ au plus ~~égale au nombre des côtés traversés. A chacun des côtés traversés correspondra une~~ ~~Je dis, au plus égale, parce que~~ La substitution S peut se mettre d'une infinité de manières, sous la forme (2). Nous avons d'ailleurs le droit de choisir parmi ces différentes manières, celle qui nous convient le mieux ; car chacune d'elles nous conduira à une limite supérieure des coefficients. Voici celle que nous ~~choisirons~~ adopterons. ~~Supposons que~~ Soient C_1, C_2, — C_{2n} les $2n$ côtés du polygone R_0 ; soit R_i le polygone contigu à R_0 le long de C_i ; soit s_i la substitution du groupe g qui change R_0 en R_i, et S_i la substitution correspondante du groupe G. Les substitutions $S_1, S_2, \dots S_{2n}$ seront les substitutions fondamentales du groupe G. Cela posé supposons que l'arc $z.z_0$ dont nous nous occupons sorte du polygone R_0 par exemple par le côté C_{α_1}, puis du polygone suivant par le côté homologue à C_{α_2} et ainsi de suite jusqu'~~au côté C_{α_n}~~ à l'avant dernier

polygone d'où il sortira par le côté C_{α_n}. Nous poserons alors:

$$(6)\qquad S = S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \ldots S_{\alpha_2} S_{\alpha_1}$$

Mais ce ne sera pas encore là la forme définitive que nous adopterons pour S. Supposons en effet que l'arc $z.zS$ pénètre dans l'un des petits cercles relatifs à l'un des sommets de la 2e sorte et y franchisse un certain nombre de côtés appartenant à R_0 et à ses transformés. Tous ces côtés iront alors forcément aboutir au sommet de la 2e sorte où le petit cercle en question touche le cercle fondamental et ils se succèderont périodiquement de la façon suivante: On rencontrera d'abord un côté homologue à C_{λ_1}, puis un côté homologue à C_{λ_2}, etc. jusqu'à ce qu'on retombe sur un côté homologue à C_{λ_1}, on retrouvera ensuite un côté homologue à C_{λ_2} et ainsi de suite dans le même ordre; ~~on retro~~ si nous réunissons ensemble les facteurs de l'expression (6) qui correspondent aux côtés rencontrés à l'intérieur de ce petit cercle, ces facteurs ~~se présenteront dans~~ pourront s'écrire de la ~~l'ordre~~ manière suivante:

$$(7)\qquad S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} \left(S_{\lambda_K} S_{\lambda_{K-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}\right)^\beta$$

K est le nombre de côtés compris dans une période et c'est précisément le nombre des sommets de R_0 qui forment un même cycle parabolique; β est le nombre des périodes; enfin

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$$

est l'ensemble des facteurs de l'expression (6) qui forment un résidu n'entrant dans aucune période; leur nombre est plus petit que K. Mais

$$\left(S_{\lambda_K} S_{\lambda_{K-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}\right) = T$$

est une substitution critique de sorte qu'on peut remplacer dans l'expression (6) l'ensemble des facteurs (7) par:

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} T^\beta$$

Quand on aura fait cette opération, l'expression (6) sera devenue l'expression (2) définitive et il n'y entrera, comme on le voit que des substitutions fondamentales et des substitutions critiques.

Maintenant $\Sigma\gamma$ est le nombre des substitutions fondamentales entrant dans cette expression (2). Chacune d'elles correspond à une intersection de l'arc $z_{.}z_0$ avec un côté des transformés de R_0. ~~Parmi ces intersections~~ ~~un certain~~ quelques-unes de ces intersections auront lieu en dehors des petits cercles et leur nombre ne pourra pas être plus grand que $\frac{R}{\mu}$; les autres auront lieu à l'intérieur des ~~des~~ petits cercles. Si l'on considère d'abord les petits cercles relatifs ~~au~~ à un sommet de la 1ère sorte, on reconnaîtra sans peine que le nombre des intersections possibles dans chacun d'eux est limité. A l'intérieur des petits cercles relatifs aux sommets de la 2e sorte, le nombre des intersections pourrait au contraire être ~~plus grand~~ illimité; mais un nombre ~~fini~~ limité d'entre elles seulement se rapportent à des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) définitive. On a vu en effet que dans cette expression, nous avons remplacé l'ensemble des facteurs (7) par le produit d'un nombre limité de substitutions fondamentales et d'une certaine puissance d'une substitution critique. Ainsi on peut trouver une limite supérieure h du nombre des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) et relatives à des intersections ayant lieu à l'intérieur d'un petit cercle. Il en résulte que

$$\Sigma\gamma < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h}{\lambda}\right)$$

Quant au nombre q, il est au plus égal au nombre des petits cercles traversés, on a donc:

$$\Sigma\gamma + 3q < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h+3}{\lambda}\right)$$

Il faut maintenant trouver une limite supérieure de $\Sigma L\beta$. Considérons un petit cercle quelconque relatif à un sommet A de la 2e sorte, et la substitution critique T correspondante; elle entrera à la puissance β dans l'expression (2) définitive; et ce nombre β est au plus égal au nombre des intersection qui ont lieu à l'intérieur du petit cercle; entre ~~le petit~~ l'arc $z_{.}z_0$ et certains ~~des~~ côtés ~~que vient des~~ ~~ces intersections ont lieu~~ ~~les côtés que~~ transformés de R_0 ~~vont ainsi couper l'arc $z_{.}z_0$ dans ce petit cercle~~ ~~correspondant~~ qui vont tous converger au sommet A et qui sont tous homologues entre eux ~~qui correspond au~~ à ce petit cercle; ~~et~~ Il est aisé de trouver une limite supérieure à du nombre de ces ~~des~~ intersections. Faisons passer par le sommet A deux cercles AB et AC orthogonaux au cercle fondamental, B et C étant par exemple sur le petit cercle considéré; la L de l'arc ~~intercepté par AB et~~ BC de ce petit cercle pourra s'appeler <u>l'écart</u> des deux cercles AB et AC. Soit AB_1 un côté appartenant à l'un des transformés de R_0 et aboutissant au point A; soit AB_2 ~~un côté~~ le transformé de AB_1 par la substitution ~~critique~~ parabolique du groupe g qui a pour point double le point A T, AB_3 le transformé de AB_2 par T, cette même substitution, etc; l'écart de deux de ces transformés consécutifs AB_n, AB_{n+1} sera une constante ν. Soient maintenant B et D les deux extrémités de ~~l'arc~~ la portion de l'arc z, z_0 qui est à l'intérieur du petit cercle. Le point B se trouvera sur la circonférence de ce petit cercle; et il en sera de même de D, à moins que D ne soit le point z_0 lui-même. Soit L_1 la L de l'arc BD et N l'écart des cercles AB et AD; on aura:

$$\beta < \frac{N}{\nu}$$

et d'autre part:

$$\cancel{L_1 \geq} \quad \cancel{L_1 \geq}$$

$$\cancel{N <}$$

$$N \leq \frac{e^{L_1} - e^{-L_1}}{2}$$

le cas ~~le plus~~ de l'égalité se présentant lorsque les cercles ~~BD (: z z₀ et A~~ $z.z_0$ et AD se coupent orthogonalement en D. On déduit de là:

$$\beta < \frac{e^{L_1}}{2\nu}$$

d'où $\cancel{L\beta < L_1 - L 2\nu}$

$$\log\beta < L_1 - \log 2\nu.$$

On peut trouver une quantité k_1 telle que pour tous les petits cercles relatifs à un sommet de la 2e sorte:

$$-\log 2\nu < k_1$$

On aura alors:

$$\Sigma \log\beta < R + k_1 q < R\left(1 + \frac{k_1}{\lambda}\right)$$

Telles sont les deux limites supérieures cherchées. On en déduit que les coëfficients de la substitution S sont plus petits que

$$e^{aR}$$

a ~~R~~ étant une constante. C'est le résultat auquel nous étions parvenus dans le paragraphe 5 et d'où nous avions conclu la convergence des séries ζ. Ces séries sont donc encore convergentes dans le cas qui nous occupe.

Ainsi toutes ~~ce que nous avions conclu~~ les conclusions du paragraphe 5 subsistent ici. En est-il de même de celles du paragraphe 6? ~~Cherchons d'abord de~~ et en particulier l'identité suivante:

$$(8)\quad \Lambda_i = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \sum \frac{A}{z-a} + \sum \frac{A_2}{(z-a)^2} + \cdots + \sum \frac{A_m}{(z-a)^m} \mp \mathfrak{A}$$

~~est-elle~~ où Z_i est une fonction zétafuchsienne et f une fonction fuchsienne de z, où les a sont les infinis du premier membre et les A les résidus correspondants?

En d'autres termes l'intégrale:

$$(9)\qquad \int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} dz$$

prise le long d'un contour convenablement choisi tend-elle encore vers 0 lorsque ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental? Cela ne serait évidemment pas vrai si nous ~~pour une~~ choisissions ~~la fonction zétafuchsienne~~ l'expression sous le signe $\int$ $Z_i(z)$ d'une façon tout à fait quelconque. Nous lui imposerons la condition de s'annuler en tous les sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental; je veux dire qu'en tous ces sommets les p fonctions

$$Z_1,\ Z_2,\ \ldots\ Z_p$$

du système considéré multipliées par $\frac{1}{z-x}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$ ~~s'annuleront~~ en même temps. Il existe évidemment une infinité de systèmes zétafuchsiens engendrés par deux groupes g et G donnés et satisfaisant à cette condition.

~~Je puis supposer également, mais cette fois pour simplifier seulement~~ que l'expression:

$$(10)\ \cancel{(8)}\qquad Z_i(z)\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} = \Lambda_i$$

ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0, non plus bien entendu qu'aucune des expressions qu'on obtient en donnant à l'indice i l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots p$.

Cela posé, nous avons dit que l'expression (10) devait s'annuler pour $z = \alpha_i$, ~~c'est à dire quand~~ (si α_i est un sommet de la 2e sorte) c'est à dire que son module devait tendre vers 0 quand z tend vers α_i en suivant l'un des côtés de R_0. Voyons comment cette expression ~~s'annule~~ tend vers 0. Supprimons l'indice i du sommet α_i et appelons le simplement α pour abréger. Le module de α sera égal à 1 puisque ce sommet est sur le cercle fondamental.

Posons

$$t = \frac{\beta}{z-\alpha} \qquad \beta \text{ étant un coefficient convenablement choisi}$$

Nous avons vu que les fonctions fuchsiennes de z sont dans le voisinage de $z=\alpha$, holomorphes en e^t et les fonctions zétafuchsiennes sont de la forme:

(11) $P_1 e^{\lambda_1 t}\Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t}\Phi_2 + \text{———} + P_q e^{\lambda_q t}\Phi_q$

où les Φ sont holomorphes en e^t et où les P sont des polynômes entiers en t. D'ailleurs il est aisé de voir que β est une quantité telle, que quand l'argument de z est le même que celui de α et son module plus petit, ~~que~~ la ~~quantité~~ valeur de t est réelle et négative; si donc z tend vers α en suivant un des côtés de R_0, e^t tend vers 0.

On a d'ailleurs:

$$\frac{df}{dz} = \cancel{t^2\Phi'} = t^2\Phi'$$

Φ' étant holomorphe en e^t.

Donc l'expression (10) peut se mettre sous la forme d'une somme de termes de la forme suivante:

$$\sum B t^\mu \cancel{e^{\lambda t}} e^{\nu t}$$

où B, μ et ν sont des constantes. Pour que l'expression (10) tende vers 0, il faut et il suffit que toutes les constantes ν aient leur partie réelle positive.

Soit maintenant R la distance de l'origine au point z, comptée au point de vue non euclidien; nous aurons:

$$|z| = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1}$$

Supposons que l'argument de z soit le même que celui de α, on aura:

$$|t| = \frac{|\beta|}{1-|z|} = \frac{|\beta|}{2}\left(e^{2R}+1\right)$$

Lorsque z tend vers α; ~~alors~~ l'expression:

$|t|\, e^{-2R}$ tend vers une limite finie $\frac{|\beta|}{2}$. Il est aisé de voir qu'il en est encore de même quand z tend vers a en suivant l'un des côtés de R_0. Il en résulte que l'expression

$$\Lambda e^{mR}$$

tendra vers 0 quel que soit m quand z tendra vers α en suivant des côtés de R_0. D'où cette conclusion; c'est qu'on peut trouver un nombre M tel que l'inégalité

$$|\Lambda| < M\left(e^{2R}+e^{-2R}+2\right)^{-h}$$

subsiste tout le long du périmètre de R_0.

Considérons maintenant deux points transformés l'un de l'autre z et zs_i, et appelons A et R leurs distances à l'origine évaluée au point de vue non euclidien. Soit λ_0 le plus grand module des quantités:

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_p$$

au point z, et soit λ_1 le module de l'un des Λ au point zs_i. Cherchons une limite supérieure du rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

Nous avons vu que les coëfficients de la substitution S_i du groupe G qui correspond à s_i étaient plus petits que

$$e^{aL}$$

a étant une constante et L la distance non-euclidienne de z à zs_i. Mais on n'a qu'à se reporter au mode de démonstration adopté, pour voir que, dans cette expression, L peut tout aussi bien représenter la distance du point zs_i à un point quelconque situé dans le même polygone que z. Si donc les points O et z sont tous deux dans le polygone R_0, les coëfficients de S_i seront tous plus petits que:

$$e^{aR}$$

D'autre part on a:

$$\frac{df(zs_i)}{dzs_i} = \frac{df(z)}{dz}\,\frac{e^{2R}+e^{-2R}+2}{e^{2A}+e^{-2A}+2}$$

On déduit de là:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < p\,e^{aR}\left(\frac{e^{2R}+e^{-2R}+2}{e^{2A}+e^{-2A}+2}\right)^{-h}$$

Si le point z est sur le périmètre de R_0, on a:

$$\lambda_0 < M\left(e^{2A}+e^{-2A}+2\right)^{-h}$$

On en déduit:

$$\lambda_1 < p\,M\,e^{aR}\left(e^{2R}+e^{-2R}+2\right)^{-h}$$

Nous pourrons écrire plus simplement:

$$A_1 < p M e^{(a-2h)R}$$

~~Il va s'agir maintenant de calculer l'intégrale:~~

$$\cancel{\int e^{-mR} |dz|}$$

~~le long d'un cercle orthogonal au cercle fondamental.~~

Il reste à montrer maintenant que la longueur du contour d'intégration est finie. Nous supposerons que la portion du plan limitée par ce contour est formée d'un certain nombre de polygones transformés de R_0. Le contour sera donc formé d'un certain nombre de côtés de ces polygones et il s'agit de faire voir que l'on peut choisir ces polygones de manière que le contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental et reste cependant de longueur finie.

Pour simplifier la démonstration nous nous restreindrons aux groupes g de la 2^e^ famille, laissant de côté la 6^e^ famille qui est beaucoup moins importante et pour laquelle ~~du reste~~ d'ailleurs le résultat reste vrai.

Pour la 2^e^ famille, le polygone R_0 et ses transformés ont tous leurs sommets sur le cercle fondamental et le contour d'intégration, quels que soient les polygones qui le forment, se compose toujours d'un certain nombre ~~de cercles~~ d'arcs de cercle tangents deux à deux et orthogonaux au cercle fondamental. Il est aisé de voir alors que sa longueur reste toujours plus petite que π^2

Supposons maintenant que l'on prenne pour contour d'intégration le périmètre de la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont, en totalité ou en partie, intérieurs au cercle K qui a pour centre l'origine et pour rayon R (au point de vue non-euclidien). L'intégrale (9) est alors plus petite que:

$$\pi^2 p M e^{(a-2h)R}$$

Si $2h$ est plus grand que a, elle tendra vers 0 quand R croîtra indéfiniment. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer. On peut en conclure que l'identité (8) analogue à l'identité du paragraphe précédent, subsiste encore dans le cas qui nous occupe. Il en est de même des résultats que nous en avons déduits et en particulier de la décomposition en éléments simples des expressions telles que Λ et des fonctions zétafuchsiennes.

Le résumé du présent paragraphe, c'est qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les fonctions zétafuchsiennes que nous venons d'appeler de la 1ère espèce et les fonctions engendrées par les groupes fuchsiens de la 1ère famille.

§ 8 Fonctions de la deuxième espèce.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions zétafuchsiennes étudiées étaient de la première espèce, c'est à dire que les substitutions critiques avaient des multiplicateurs de module un. Les mêmes résultats subsistent-ils pour les fonctions de la deuxième espèce. Il est aisé de voir que non.

Reprenons en effet dans ce cas la série Σ du paragraphe (5). Je dis qu'elle sera divergente ou tout au moins qu'elle ne sera pas absolument convergente. ~~Soit~~ En effet ne conservons dans cette série qu'une partie des termes. Soit:

$$\left(\frac{1}{z-\alpha},\ \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right)$$

une substitution parabolique s_i du groupe g et soit S_i la substitution critique correspondante du groupe G. Elle pourra toujours se mettre sous la forme canonique

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p;\ M_1 Z_1, M_2 Z_2, \ldots M_p Z_p)$$

Ne conservons dans la série Σ que les termes qui correspondent à la substitution s_i et à ses puissances positives et négatives. Ces termes s'écrivent:

$$\sum H\left(\frac{1}{z-\alpha}+q\beta\right) M_\mu^{-q}\left[q\beta(z-\alpha)+1\right]^{-2m}$$

où H est le signe d'une fonction rationnelle et où q prend toutes les valeurs entières positives et négatives. J'écrirai plus simplement:

$$\sum M_\mu^{-q}\,\varphi(q)$$

$\varphi(q)$ étant une fonction rationnelle de q. Cette série est évidemment divergente.

Les résultats du paragraphe (5) ne sont donc plus vrais ici, et il en est de même de ceux du paragraphe 6 qui y sont d'ailleurs intimement liés.

Mais, de ce que ces résultats ne peuvent être étendus sans modifications à la deuxième espèce, il ne suit pas qu'ils ne peuvent pas être généralisés et c'est ce que nous allons chercher à faire.

Enonçons ~~Voyons~~ d'abord ~~si certains~~ les résultats partiels qui ~~subsistent~~ subsistent sans changement.

1° Les coefficients d'une substitution S_i quelconque du groupe G sont plus petits que A^σ, A étant une constante et σ l'exposant de la substitution S_i.

2° Si l'on a:

$$\Lambda_i(z) = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

et que Λ_i s'annule ainsi que ses $p-1$ conjuguées en ~~tous les~~ tous les sommets de la deuxième sorte de R_0, l'expression

$$\Lambda e^{mR}$$ où R désigne la distance non euclidienne de z à l'origine

tend vers 0 quand z tend vers ~~le sommet envisagé~~ l'un de ces sommets en suivant le périmètre de R_0.

3° Si de plus les Λ ne deviennent pas infinis le long du périmètre de R_0, on pourra trouver un nombre M tel que le long de ce périmètre, on ait:

$$|\Lambda| < M(e^{2R}+e^{-2R}+2)^{-h}$$

4° Le périmètre d'une figure simplement connexe formée par un certain nombre de transformés de R_0 est toujours plus petit que π^2, (si nous nous restreignons à la 2e famille, comme nous l'avons fait précédemment.)

Il résulte de ce qui précède, et l'on peut s'en assurer en se reportant au paragraphe précédent, que, si z est un point du périmètre du transformé de R_0 par une substitution S_i d'exposant σ; on a, en ce point z:

$$|\Lambda| < A^\sigma M e^{-2hR}$$

Maintenant voici le problème ~~que nous allons~~ qu'il faudrait chercher à résoudre:

Trouver une fonction $F(z)$ ~~telle~~ que l'intégrale:

$$\int \frac{\Lambda\, dz}{F(z-x)}$$

tende vers 0 quand on la prend le long d'un contour convenablement choisi et se rapprochant indéfiniment du cercle fondamental.

Voici le contour que nous choisirons: Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ au point de vue non euclidien. Considérons l'ensemble des polygones transformés de R_0 et qui sont partiellement intérieurs à ce cercle. Cet ensemble formera une figure simplement connexe dont le périmètre sera plus petit que π^2 et dont tous les points seront à une distance [illegible] de l'origine plus grande que ρ. Nous ferons ensuite croître ρ indéfiniment.

Voyons quelles sont les conditions qu'il nous faut pour cela, imposer à la fonction F:

1° Lorsque z tend vers un sommet de la 2e sorte, en suivant le périmètre de R_0, F ne doit pas tendre vers 0 assez rapidement pour que

$$\left|\frac{\Lambda}{F}\right| \left(e^{2R} + e^{-2R} + 2\right)^{-h}$$

ne tende pas vers 0.

2° Lorsque z se trouve sur le périmètre du transformé de R_0 par une substitution d'exposant 6, son module doit être plus grand que

$$B\,C^6$$

B et C étant des constantes suffisamment grandes.

Il est sans doute possible de trouver une pareille fonction F; mais ce n'est pas ainsi que nous procéderons ici:

L'analogie avec la théorie des facteurs primaires de M. Weierstrass et avec le théorème de M. Mittag Leffler va nous conduire à la généralisation cherchée:

~~On sait~~ Soit en effet ~~que~~ $f(x)$ une fonction entière à décomposer en facteurs primaires. Supposons par exemple qu'elle n'a que des zéros simples $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ Pour résoudre ce problème, on cherche à décomposer en ~~éléments~~ fractions simples ~~le~~ quotient:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

et on obtient ce résultat par la considération de l'intégrale:

$$\int \frac{dz}{z^m(z-x)} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

prise le long d'un cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon croît indéfiniment.

Supposons d'abord que l'on puisse trouver un nombre m assez grand pour que cette intégrale tende vers 0. On trouve alors:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{x^m}{a_i^m (x-a_i)} + P(x)$$

$P(x)$ étant un polynôme entier d'ordre $m-1$.

Dans ce cas la fonction $f(x)$ est dite, comme on sait, de première espèce et de genre m.

× Si au contraire on ne peut pas trouver de nombre m assez grand pour que l'intégrale ~~soit nulle~~ tende vers 0, on fera croître le nombre m avec le rayon du cercle qui sert de contour d'intégration et on pourra toujours le faire ~~croître~~ assez vite pour que l'intégrale tende vers 0. On trouve alors :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim \left[\Sigma \frac{x^m}{a^m (x-a)} + P(x) \right]$$

~~où le signe Σ~~ Dans cette expression le signe Σ se rapporte à l'ensemble des points a situés à l'intérieur du cercle de rayon R et $P(x)$ représente le polynôme formé ~~l'ensemble~~ des m premiers termes du développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ suivant les puissances de x. ~~C'est de~~ Quand m et R croissent indéfiniment selon une certaine loi, le second membre tend vers une limite qui n'est autre chose que $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette expression qu'on peut déduire le développement de $\frac{f'}{f}$ sous forme de série :

$$\frac{f'}{f} = \Sigma \frac{x^{\mu}}{a^{\mu}(x-a)} + G(x)$$

μ étant un entier qui croît indéfiniment avec le module de a et $G(x)$ étant une transcendante entière.

La fonction entière $f(x)$ est alors de 2de espèce.

L'analogie avec le problème qui nous occupe est évidente. Les fonctions ~~dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents~~ zétafuchsiennes de 1re espèce sont analogues aux transcendantes entières de 1re espèce et on en obtient le développement et la décomposition en éléments simples en remarquant que l'intégrale :

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-m} \frac{Z(z)}{z-x}\, dz$$

tend vers 0 quand le nombre m est suffisamment grand et que le contour d'intégration, d'ailleurs convenablement choisi, se rapproche indéfiniment du cercle fondamental.

Si au contraire $Z(z)$ est une fonction de 2^{e} espèce, on ne peut plus ~~prendre~~ trouver un nombre m assez grand pour qu'il en soit ainsi. On est donc conduit, au lieu de conserver à l'exposant m une valeur constante, de le faire croître indéfiniment en même temps que le contour d'intégration se rapproche du cercle fondamental, et cela assez vite pour que l'intégrale tende vers

O. 1

Cela est toujours possible. Il faut toutefois faire une hypothèse sur la fonction fuchsienne $f(z)$ dont la dérivée $\frac{df}{dz}$ entre sous le signe $\int$ dans l'intégrale précédente. Il faut supposer que $\frac{df}{dz}$ ~~tend vers 0~~ croisse indéfiniment quand z tend vers un des sommets de R_0 situé sur le cercle fondamental, en suivant l'un des côtés de ce polygone. Il existe en effet une infinité de fonctions fuchsiennes admettant le groupe g et jouissant de cette propriété.

Mais nous pouvons généraliser un peu la forme de l'intégrale considérée en procédant de la manière suivante. Soient ~~f_1~~ f et ~~f_2~~ f_1 les deux fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. Et soit $F(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y, choisie de telle sorte que:

$$\cancel{\left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-1} F(f_1, f_2)} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F(f, f_1)$$

tende vers 0 quand z se rapproche indéfiniment d'un sommet de R_0 situé sur le cercle fondamental. Considérons alors l'intégrale:

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z_i \frac{dz}{z-x}$$

prise le long du contour envisagé dans le paragraphe précédent et qui limite la portion du plan ~~qui est~~ formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle dont le centre est O et le rayon non euclidien R ~~et qui enveloppe la limite la portion du plan formée de t~~. Nous ferons croître μ indéfiniment en même temps que ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental, c'est à dire en même temps que la quantité R croît elle-même au delà de toute limite.

On peut d'abord trouver ~~deux~~ nombres M et λ tels que le long du périmètre de R_0, le module de Z_i soit plus petit que:

$$M e^{\lambda t}$$

où

$$t = \frac{1}{1 - |z|}$$

De plus nous pouvons trouver deux nombres positifs N et α tels que le long du périmètre de R_0, le module de ~~Z~~

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F$$

soit plus petit que:

$$N e^{-\alpha t} \left(e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2\right)^{-1}$$

~~R étant~~ ρ étant la distance non euclidienne des deux points O et z. ~~et α étant~~ le module de la quantité sous le signe $\int$ en laissant de de côté le facteur:

$$\frac{1}{z-x}$$

dont le module est essentiellement fini, est plus petit que:

$$MN^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t}\left(e^{2\rho}+e^{-2\rho}+2\right)^{-\mu}$$

le long du périmètre de R_0.

Mais l'intégrale doit être prise le long d'un contour que nous avons défini plus haut ~~et~~, qui est formé de côtés appartenant à divers ~~des~~ transformés de R_0 et qui est d'ailleurs tout entier extérieur au cercle de centre O et de rayon non-euclidien R. ~~Soit~~ Considérons un ~~côté~~ des côtés de ce contour appartenant à un polygone R_i transformé de R_0 par une substitution s_i. Soit $z s_i$ ce point, le point correspondant du périmètre de R_0 sera z. Nous conserverons la notations:

$$t=\frac{1}{1-|z|}$$ et nous appellerons ρ et ρ' les distances non euclidiennes des points z et $z s_i$ au point O. Il vient alors

$$\rho' > R.$$

~~On a d'ailleurs:~~ Le module de Z au point $z s_i$ est plus petit que le module de cette même fonction au point z, multiplié par A^σ, A étant une constante convenablement choisie et σ étant l'exposant de la substitution s_i. Quant à

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}F$$

son module se trouve multiplié par

$$\left(\frac{e^{2\rho'}+e^{-2\rho'}+2}{e^{2\rho}+e^{-2\rho}+2}\right)^{-1}$$

quand on passe du point z au point $z s_i$. Il résulte de là qu'au point $z s_i$ le module de la fonction sous le signe $\int$ est plus petit que:

$$A^\sigma MN^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t}\left(e^{2\rho'}+e^{-2\rho'}+2\right)^{-\mu}$$

ou que:

$$A^\sigma MN^\mu e^{(\lambda-\alpha\mu)t}e^{-2\mu R}$$

Je puis d'abord toujours supposer que N est plus petit que 1. En effet s'il n'en était pas ainsi, je remplacerais la fonction F que j'ai choisie arbitrairement parmi les fonctions fuchsiennes de groupe g par la fonction $\frac{F}{N}$.

Si μ est suffisamment grand, le facteur $e^{(\lambda - \alpha\mu)t}$ est également plus petit que 1 de sorte qu'il reste à considérer les deux facteurs:

$$A^6 e^{-2\mu R}$$

On ~~voit~~ aisément que

$$6 < e^{\beta R}$$

β étant un nombre convenablement choisi, mais on peut faire croître μ assez rapidement avec R, pour que

$$e^{\beta R} L A - 2\mu R$$

tende vers $-\infty$. Dans ces conditions la quantité sous le signe $\int$ tend vers 0 et, comme le périmètre d'intégration est fixé, l'intégrale elle-même tend vers 0

C. Q. F. D.

Quelle conclusion devons-nous tirer de là en ce qui concerne le développement ~~décomposition~~ de la fonction Z ~~en éléments simples~~?

~~La fonction sous le signe $\int$~~ ~~Supposons que~~ la fonction

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z$$

~~admette la l'intérieur du contour d'intégration les infinis $a_1, a_2 \dots a_q$ avec~~ a à l'intérieur du contour d'intégration le caractère d'une fonction rationnelle. Nous pourrons donc trouver une fonction rationnelle $Q(z)$ telle que la différence

$$\Delta = \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z - Q$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce contour. Pour achever de déterminer la fonction rationnelle Q, nous supposerons que son numérateur est de degré inférieur à son dénominateur.

Dans ces conditions la différence Δ tend vers 0 lorsque μ et R ~~tendent vers 0.~~ croissent indéfiniment. C'est là la conséquence immédiate de ce que nous avons vu au sujet de l'intégrale.

On voit par là que la fonction Z peut avec une approximation aussi grande que l'on veut ~~être~~ mise sous la forme même fonction rationnelle multipliée par une expression de la forme

$$\frac{1}{F^{\mu}}\left(\frac{df}{dz}\right)^{\nu}$$

F et f étant deux fonctions fuchsiennes.

C'est tout ce que j'ai pu trouver jusqu'ici comme ~~généralisation~~ extension aux fonctions de 2e espèce des propriétés que nous avons démontrées plus haut ~~en ce qui concerne les fonctions de seconde espèce~~. Je ne doute pas qu'on ne puisse arriver un jour à une théorie plus complète.

En attendant, nous pouvons toujours exprimer une fonction zétafuchsienne quelconque, soit sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, soit sous la forme du quotient de deux pareilles séries.

Soit d'abord en effet une équation linéaire:

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum_K \varphi_K(x,y)\frac{d^K v}{dx^K} = 0$$

les φ_K étant rationnels et x et y étant liés par la relation

$$\psi(x,y) = 0$$

On pourra toujours remplacer x et y par deux fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$, ~~de~~ la 2e famille, choisies de telle sorte qu'elles satisfassent à la relation

$$\psi(f, f_1) = 0.$$

et qu'elles ne puissent prendre aucune des valeurs qui correspondent aux points singuliers ni aux points à apparence singulière ~~et aux~~ de l'équation précédente. Dans ces conditions, v sera une fonction zétafuchsienne de z ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et développable par conséquent en série suivant les puissances de z. Les coefficients se calculent par récurrence.

Supposons maintenant que $Z(z)$ soit une fonction zétafuchsienne admettant des infinis à l'intérieur du cercle fondamental, elle ne pourra plus être développée en série ordonnée suivant les puissances de z et toujours convergente. Mais on pourra toujours trouver deux fonctions fuchsiennes f et F admettant le groupe g et un nombre entier m, tels que les deux fonctions

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^m F \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^m FZ$$

dont le quotient est Z ~~restent~~ finies à l'intérieur du cercle fondamental. Elles pourront alors être développées en séries suivant les puissances croissantes de z. Quant aux coëfficients on pourra les calculer par récurrence, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

§ 9 Fonctions diverses.

Les fonctions zétafuchsiennes dont il a été question dans les paragraphes précédents ne sont pas les seules que l'on peut imaginer. ~~Il existe~~ On peut construire en effet des fonctions zétafuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan; ce sont des fonctions qui subissent les substitutions linéaires d'un groupe G quand la variable subit les substitutions d'un groupe fuchsien g de la 3^e, de la 4^e, de la 5^e ou de la 7^e familles. On peut aussi remplacer le groupe g par un groupe Kleinéen, et on obtiendra de la sorte des fonctions zétakleinéennes, existant soit dans toute l'étendue du plan, soit dans un certain domaine. Cela suffit pour faire comprendre que dans les cinq mémoires des Acta Mathematica que j'ai consacrés à l'étude des transcendantes fuchsiennes et Kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes.

Paris, 30 Mai 1884.

Expos 1954

~~Rubrique papier 234~~

Feuilles Rap. Expo (1) et Arch ont été retirées pour être présentées sous

Cot. 34